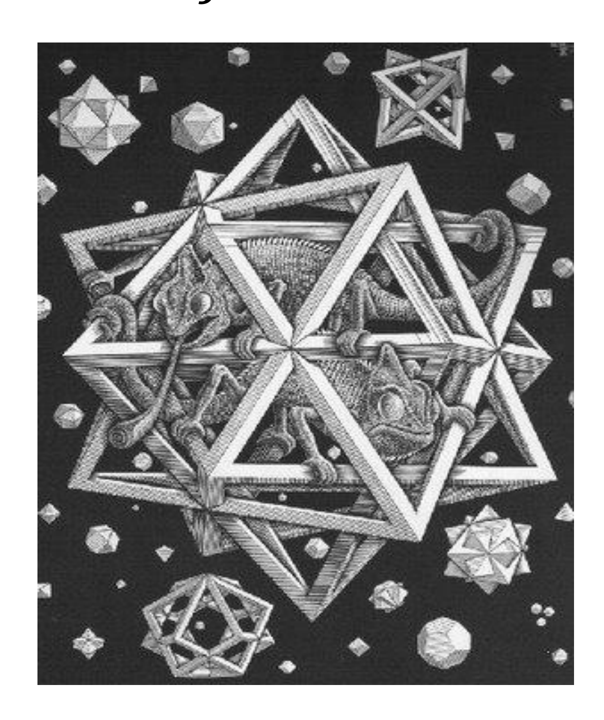
J. Rey Pastor y José Balbini

Historia de la Matemática

vol. 1

De la antigüedad a la baja Edad Media





gedisa
editorial

HISTORIA
DE LA MATEMÁTICA
VOL. 1

1° reimpresión,
Agosto de 1985,
Barcelona, España

Muntaner, 460, entlo., 1°
Tel. 201-6000
08006 • Barcelona, España






I. S. B .N. 84-7432-206-5 (obra completa)
I. S. B. N. 84 -7432·207-3 (volumen 1)

Depósito Legal, B. 30.566· 1985

Impreso en España

ÍNDICE

LA MATEMÁTICA EMPÍRICA

La prehistoria

La expresión: el mundo está impregnado de matemática, convertida en lugar común en una era tecnológica como la actual, es una expresión válida para todas las épocas humanas, tan consustanciados están el contar y el comparar con las especificas actividades del hombre: pensar, hablar y fabricar instrumentos.

En la mente y en la acción del hombre prehistórico no están ausentes los números más simples, las formas más elementales y la ordenación más visible de las cosas. En el hombre que da nombre a las cosas y a los actos; que conserva el fuego e imagina trampas para cazar animales; que construye viviendas y tumbas; que observa el movimiento de los astros y destaca direcciones especiales; que computa distancias con su cuerpo y sus pasos; que graba escenas de un impresionante realismo; en ese hombre y en esas actividades están prefigurados los conceptos básicos de la matemática: número, medida, orden.

Al pasar de la etapa paleolítica a la neolítica el proceso se afina: las nuevas técnicas agrícolas y pastoriles, la cerámica y la carpintera; la industria textil; la minería y la metalurgia, el trueque de bienes y objetos, la navegación y el transporte, las normas que rigen la naciente organización familiar, social y económica exigen una precisión cada vez mayor en el contar, en el medir y en el ordenar. El hallazgo del proceso deductivo y de la relación causa-efecto y los inagotables recursos de la imaginación humana harán el resto.

Y cuando asoma la escritura, como subproducto de la cultura urbana, ese saber matemático, aún vago y nebuloso. Comienza a adquirir consistencia.

Una hipótesis verosímil acerca del origen de la escritura vincula este origen con prácticas aritméticas. En efecto, según tal hipótesis, la escritura nace a mediados del IV milenio antes de Cristo en la

Baja Mesopotamia, en el seno de la cultura urbana de los sumerios cuyas ciudades estaban construidas alrededor del templo, edificado sobre una colina artificial, como una torre escalonada, que no sólo representaba la unidad espiritual de la comunidad, sino que encerraba además su riqueza económica. Los bienes del templo, acumulados en sus talleres y graneros, eran administrados por los sacerdotes. Y es explicable que a medida que esos bienes aumentaban con el crecimiento de la población, se tomaba más difícil retener de memoria las "cuentas del templo", es decir, los datos relativos a los tributos que se debían al dios y la cantidad de semillas y de ganado que se entregaba a los campesinos y pastores; de ahí la necesidad de fijar signos convencionales que permitieran retener esos datos sin confiar en la memoria individual. Que tal fuera el origen de los primeros signos grabados, lo comprobaría el hecho de que las tablillas pictográficas de Erech del 3.500 a. C., que son las más antiguas que se conocen, contienen signos que representan una cabeza de vaca, una espiga de trigo, un pez, acompañados de signos especiales que sin duda representan signos numéricos. Por lo demás, cabe recordar que entre los sumerios existía la costumbre de marcar con sellos individuales los objetos de propiedad personal, y que por ser el dios de la ciudad el único propietario de la tierra y de todos sus frutos, los sellos que marcaban los bienes del templo adquirirían un sentido más convencional y una mayor difusión.

Letras y números

Esta notación numérica de las “cuentas del templo" pone de relieve ciertas conexiones entre la escritura y los sistemas de numeración que pueden dar pábulo a la tentadora hipótesis de admitir que los sistemas escritos de numeración fueron anteriores a la escritura misma.

Observemos en primer lugar que todos los pueblos sin excepción, sean o no primitivos, tengan o no escritura, disponen de

palabras especiales para designar los números y fracciones sencillas, así como disponen de gestos y signos convencionales para indicar números o unidades.

Igualmente se encuentra en los pueblos primitivos una gran variedad de procedimientos de cómputos, que se presentan siempre como una relación cualitativa de un signo a la cosa significada, y siempre también bajo el imperio de una imagen concreta. (l)

Tal presencia constante de lo concreto en la numeración primitiva se puede presentar bajo diversos aspectos. Así, un primitivo dirá que ha tomado tantos peces como dedos tiene la mano, y si designa este hecho con una palabra que deriva de la palabra "mano", esa palabra no quiere significar el número 5, sino solamente que los objetos en cuestión son tantos como los dedos de la mano. Por otra parte, el ejemplo abstracto no cabe en la mentalidad primitiva. Así, un indio norteamericano, a quien se trataba de familiarizar con el inglés, no pudo traducir: "Ayer el hombre blanco mató seis osos”, pues ese hecho significaba una imposibilidad material.

En otros casos los números 1, 2, 3 se designan con vocablos diferentes según se refieran a personas, días u objetos, y en este último caso según sean ellos esféricos o alargados. Quizá pueda verse un residuo en nuestro léxico actual cuando al referimos a zapatos decimos "un par", mientras que para los bueyes, por ejemplo, decimos "una yunta".

También se han facilitado los cálculos mediante el uso de objetos materiales, como hojas secas o piedrecillas, que actúan a la manera de unidades en la forma como aún se acostumbra para el puntaje en los juegos de naipes. Nuestra palabra "cálculo" proviene del latín *calculí* (guijarros), y los ábacos para contar y sumar que se perfeccionaron en los tiempos históricos, hasta construir rudimentarias máquinas de calcular, no son sino dispositivos mecánicos fundados en el agrupamiento de objetos materiales.

En este campo como en tantos otros la variedad preside la actividad humana: así nativos de la isla Fidji indican el número de víctimas logrado en la caza mediante entalladuras en sus mazas, con la característica de que después de nueve entalladuras iguales, la siguiente es algo más larga, de ahí que con un sistema limitado

de numeración hablada pueden llegar a contar números relativamente grandes. Por ejemplo, al observar cinco entalladuras largas y cuatro últimas cortas, el nativo tendrá idea del número 54 para el cual seguramente en su lenguaje no dispone de la palabra adecuada. Si este sistema de entalladuras se toma convencional, entre él y un sistema de numeración escrita de tipo decimal aditivo sólo existiría una diferencia de grado, no esencial. (2)

Al pasar a los sistemas escritos de numeración, se advierte igual variedad; ya en la base, es decir en el número simple que sirve de jalón para expresar los números mayores; ya en la lectura, que puede ser de tipo aditivo, con variantes distintas, o posicional. En los sistemas aditivos el valor del número se obtiene sumando (en ocasiones restando) los valores correspondientes a cada signo individual, independientemente de la posición del signo en el contexto; mientras que en los sistemas posicionales el valor de cada signo depende de la posición de éste en el contexto. Por la base 10 y el tipo de lectura, nuestro sistema actual es decimal y posicional.

En cuanto a la base de los sistemas escritos antiguos, que probablemente provienen de bases ya existentes en los sistemas orales, se advierte igual variedad: puede ser 2, como lo comprueba el hecho de que seguimos hablando de pares y de yuntas, puede ser 3, 4 ó 5 aunque la base más difundida es 10, que ya Aristóteles justificaba en vista del número de dedos de la mano. En el idioma francés actual quedan rastros de una base 20 de los celtas, base que fue adoptada también por pueblos primitivos descalzos; nuestras docenas son también residuos de una base 12, utilizada ya por el número (aproximado) de lunaciones del año, ya por su comodidad en las medidas, en vista de la facilidad que ofrece el mayor número de sus divisores, frente por ejemplo a los de la base 10.

Casi todos los sistemas antiguos de escritura disponen de signos especiales para representar los números. Constituyen excepción el griego, el árabe, el hebreo y otros que utilizan para ese fin las letras del alfabeto respectivo. El caso griego tiene un interés especial, ya que se conocen dos sistemas de numeración escrita, ambos aditivos. Un sistema, cuyos signos se llaman herodiánicos (por Herodiano, gramático griego del siglo II que estudió, y expuso estos signos), en el cual la unidad y las primeras cuatro potencias de 10

se indican con las iniciales de las palabras respectivas, agregándose un signo especial para el 5; y un segundo sistema en el cual los nueve dígitos, las nueve decenas y las nueve centenas se representan por las 24 letras del alfabeto griego en su orden, intercalando tres letras de un alfabeto arcaico para e1 6, el 90 y el 900; y en el cual se indican con ápices y otros signos especiales las fracciones unitarias y los números superiores al millar. Por el empleo de las letras del alfabeto arcaico se supuso que el segundo sistema fuera anterior al primero, pero el hecho es que el primer sistema cayó en desuso hacia el s. IV a. C., quedando en vigencia el segundo.

Es interesante destacar que en algunos casos el sistema de numeración escrita presenta, frente a la escritura, cierta prelación, si no cronológica, por lo menos en el sentido de la sencillez y de la abstracción. Un ejemplo lo ofrecen las escrituras cretenses de las que se reconocen tres tipos: uno pictográfico y dos lineales A y B. Son todos del II milenio y la última de ellas; la lineal B, que resultó pertenecer a un idioma griego arcaico, fue descifrada por Michael Ventris en 1952. De tal escrituras ya se habían identificado no sólo los signos numéricos pertenecientes a un sistema decimal aditivo, sino también algunas operaciones aritméticas simples: sumas y probablemente cálculos de porcentajes, y sin duda tal desciframiento previo ayudó al posterior desciframiento de la escritura. (3)

Notas complementarias

(1) Los "*números corporales*". Es natural que el hombre para contar y hasta para sumar haya acudido a lo que tenía más cerca: su propio cuerpo; en especial los dedos de las manos y eventualmente de los pies. Aun hoy hablamos de dígitos (del latín *digítus* = dedo) para referirnos a las cifras 1 a 9 inclusive. Los antiguos romanos hablaban de "numerarse por dígitos": contar por los dedos; también el primitivo y el niño "cuentan con los dedos" (no "cuentan

los dedos”). Este cálculo digital se ha extendido y convertido en un “calculo corporal”, como ocurre con ciertos pueblos primitivos, que además de los dedos de las manos y de los pies utilizan otras partes del cuerpo , para contar y sumar; mientras que el cálculo digital mismo, mediante simbolismos adecuados relacionados con las posiciones de los dedos frente a otras partes del cuerpo, se perfecciono permitiendo el recuento de números bastante grandes, como presenta en sistemas de épocas históricas; ya en la antigüedad y hasta en tiempos medievales.

(2) Los *“quipos” peruanos*. Un dispositivo semejante para contar es el fundado en las cuerdecillas con nudos, de los cuales el más conocido es el “quipo” (del quechua *kipu* = nudo) peruano con el cual, mediante un sistema de cuerdas de distintos colores con nudos en números y disposición diferentes, los antiguos peruanos, sin disponer de escritura, realizaban un cabal sistema de numeración escrita que les permitió registrar cuanto dato de utilidad para el Estado podía registrarse, gracias, claro es, también a la prodigiosa memoria de sus calculadores.

(3) La cronología maya*.* Otro ejemplo lo ofrecen los mayas de cuya escritura jeroglífica se descifraron últimamente 1961, con calculadoras electrónicas, algunos textos religiosos: mientras que ya se conocían sus dos sistemas de numeración. En uno de ellos, con signos jeroglíficos, cada número indicaba se indicaba con una cabeza de dios, de hombre o de animal ; mientras que en el otro de índole más abstracta se utilizaba un sistema posicional de base 20 (aunque no coherente), en el cual no figuran sino tres signos un punto para la unidad, una barra para cinco unidades y una especie de conchilla u ojo semicerrado para indicar en cero: de manera que en este sistema cada cifra está representada por un determinado grupo de pocos puntos y barras. El número se forma ordenando las cifras de abajo hacia arriba. Este sistema, utilizado principalmente con fines cronológicos, no es coherente en el sentido que la tercera unidad no es 400 = 20, sino 360 discrepancia que se explicaría en vista de aquellos fines por ser el año oficial maya de 360 días.

Mientras que este sistema permite expresar números muy grandes en los códices mayas aparecen números que superan los

doce millones, es sintomático destacar en cambio que la escritura maya no ha podido superar la etapa pictográfica. Es posible que el afán de fijar con precisión las fechas vinculadas con los dioses patronos de la ciudad o de cada individuo estimulara en los mayas la búsqueda de un adecuado sistema de numeración escrita que resultó dotado de un grado de abstracción muy superior al que revela su incipiente escritura.

Formas y problemas

El contar y el numerar, con ser actividades comunes y frecuentes, no agotan el campo de las nociones matemáticas del hombre primitivo y conjeturalmente del prehistórico.

Por su nombre: geometría en griego alude a "medir la tierra", los conocimientos geométricos tuvieron un origen práctico. Por lo menos, así lo atestigua Herodoto en un conocido pasaje de su Historia: "El rey Egipcio dividió en suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el río arrasaba una parte del lote de un habitante, éste se presentaba al rey y le exponía lo ocurrido, a lo que el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión de la perdida y más adelante la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote. En virtud de esta práctica que, pienso, comenzó a conocerse la geometría en Egipto, de donde pasó a Grecia".

Más no sólo el hombre midió la tierra; otras mediciones exigió la construcción de sus viviendas y tumbas, de sus graneros y canales. Por lo demás nuevas nociones geométricas surgieron de las formas y figuras con que el hombre decoró y ornamentó sus viviendas y sus objetos, así como de la observación de formas que atrajeron su atención por su sencillez o su simetría: la línea ("línea" viene de *lino*), el círculo, los polígonos y poliedros regulares. El ladrillo, de antigua dala, aportó probablemente la noción de ángulo recto, mientras que nuevas formas geométricas nacían de los

movimientos: ya las danzas humanas, ya del andar de los astros en la bóveda celeste.

Por último, cabe mencionar otras nociones matemáticas de origen completamente distinto: es el conjunto de problemas, enigmas y adivinanzas que componen el folklore matemático que practican todos los pueblos. Mostrando a veces curiosas coincidencias de temas en pueblos totalmente alejados explicándose tal coincidencia solamente por trasmisión oral a la manera de semillas que lleva el viento, favorecidas por el carácter recreativo, enigmático y, a veces, sorprendente del problema.

Sin embargo, no obstante tal finalidad extra matemática, las cuestiones del folklore matemático encierran interesantes nociones de orden aritmético y, a veces, hasta algebraico.

LA MATEMÁTICA PREHELÉNICA

Los babilonios

Hasta el primer tercio de este siglo, los conocimientos que se poseían acerca de la matemática de los pueblos que habitaron la Mesopotamia: sumerios, acadios, babilonios, asirios... eran escasos y no revelaban mayor contenido científico.

Sin duda, ya se había advertido la característica fundamental, entonces más bien sorprendente, que ofrecían los sistemas de numeración utilizados en los textos cuneiformes. En efecto, hacia el año 3.000 a. C. los sumerios introdujeron un sistema de numeración posicional de base 60, que en definitiva es el sistema sexagesimal que aún utilizamos nosotros para las medidas de tiempo y angulares.

En ese sistema las cifras de 1 a 59 se escribían de acuerdo con un arcaico sistema decimal aditivo, sobre la base de dos signos cuneiformes: uno vertical para la unidad y otro horizontal para el 10. Pero a partir de 60 y para las fracciones el sistema se toma posicional, las potencias sucesivas de 50, en orden creciente o decreciente, se representan por la unidad, y cada conjunto numérico hasta 59 debe computarse 60 veces menor que el anterior.

La inexistencia de un signo para el cero, que no aparecerá hasta los tiempos helenísticos, así como de un signo que separe la parte entera de la fraccionaria, hace que el sistema no sea coherente para nosotros, aunque el contexto del problema, y a veces ocasionalmente ciertos signos especiales, impedían al calculista sumerio caer en equívocos.

Ya desde comienzos de este siglo (1906) se había revelado el carácter posicional del sistema sumerio al descifrarse textos cuneiformes con tablas de multiplicación, de recíprocos, de cuadrados,... y algunos cálculos; pero fue recientemente con la

labor de desciframiento que hicieron conocer Neugebauer (1935) y Thureau Dangin (1938) que esta matemática sexagesimal muestra su verdadera faz.

Los textos últimamente descifrados pertenecen al período babilónico (II milenio a. C.) aunque registran conocimientos de los sumerios del milenio anterior; la índole y la solución de las colecciones de problemas que aportan esos textos no sólo justifican la necesidad de un sistema de numeración flexible como el posicional, sin el cual aquella solución hubiera sido imposible, sino que arrojan nueva luz sobre las relaciones entre la matemática prehelénica y la matemática griega, de manera que actualmente nociones y figuras de la matemática antigua adquieren nuevas interpretaciones en la historia de la matemática.

Aunque en algún caso se ha querido ver la expresión de reglas generales, los problemas de los textos babilónicos son problemas numéricos particulares, con datos escogidos al efecto, en especial para que los divisores no contengan sino factores 2, 3 y 5; en muchos casos no tienen otra finalidad que el cálculo numérico, en otros se trata de aplicaciones de distinta índole.

Desde el punto de vista matemático, las novedades más importantes que registran los textos babilónicos se refieren a la solución algebraica de ecuaciones lineales y cuadráticas, y el conocimiento del llamado "teorema de Pitágoras" y de sus consecuencias numéricas.

En los problemas de primer grado con una sola incógnita las tablas de multiplicación o de recíprocos ofrecen de inmediato la solución; en los sistemas lineales, en cambio, a veces con varias incógnitas, ya entra en juego la habilidad algebraica del calculista. (1)

Tal habilidad se pone de relieve más claramente en los problemas, a veces agrupados en colecciones, que exigen la resolución de ecuaciones cuadráticas o reducibles a cuadráticas; resolución que el calculista babilónico lleva a cabo utilizando la actual resolvente a veces mediante el recurso de reducir el problema a la determinación de dos números de los cuales se conoce el producto y la suma (o la diferencia). (2)

Otros problemas, de interés aritmético o algebraico, traen la suma de términos en progresión aritmética o en progresión

geométrica de base 2; la suma de los cuadrados de los diez primeros números mediante una expresión correcta y hasta una ecuación exponencial resuelta en forma aproximada. (3)

Los problemas que se refieren a aplicaciones geométricas revelan el conocimiento de la proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, de las áreas de triángulos y trapecios así como de volúmenes de prismas y cilindros; en cambio, para la longitud de la circunferencia y el área del círculo se adoptan los valores poco aproximados de dar para la circunferencia el valor de tres diámetros (valores que se conservan en la Biblia) y para el círculo el triple del cuadrado del radio. También son erróneas las expresiones del volumen del tronco de cono y de la pirámide de base cuadrada y del cono.

Pero, sin duda, el conocimiento geométrico más interesante que revelan las tablillas es del llamado "teorema de Pitágoras", y en especial, como consecuencia, la ley de formación de los tripletes-pitagóricos, es decir, de las ternas de números enteros, que, a par de representar medidas de los lados de triángulos rectángulos, expresan la posibilidad aritmética de descomponer un numero cuadrado en suma de dos cuadrados.

El conocimiento del "teorema de Pitágoras", un milenio largo antes de la existencia de su pretendido autor, se pone de manifiesto en distintos problemas cuya solución correcta no podrá lograrse sin ese teorema (4) y, en especial, mediante un texto: el Plimpton 322 (del nombre de la colección que se conserva en la Columbia University) que se hizo conocer en 1945 y que presupone el conocimiento de la ley de formación de los tripletes pitagóricos, que aparecerá por primera vez en Occidente en los *Elementos* de Euclides hacia el 300 a. C. (5)

No es ésta la única conexión entre los datos que aportan las tablillas de los babilonios y la clásica matemática griega. Desde el punto de vista técnico, es más importante señalar la atmósfera común de álgebra no lineal, de álgebra cuadrática, que preside ambos campos; atmósfera que en las tablillas de los babilonios se revela en las ecuaciones algebraicas, y en los *Elementos* en toda la obra, en espacial el libro II, que el historiador de la matemática Zeuthem bautizó proféticamente de álgebra geométrica hace casi 90 años, cuando ni por asomo podía pensarse en la vinculación que

hoy se vislumbra entre la geometría griega y la milenaria álgebra de los babilonios.

Es posible que mediante esta álgebra geométrica podamos hacer alguna conjetura acerca del origen de los conocimientos de los babilónicos. Sean dos números a y b representados por los segmentos AB y AD (fig. 1), respectivamente; si a continuación de AB se lleva $BC=AD$ los segmentos AC y DB serán, respectivamente, $a + b$ y $a - b$. Introduciendo el centro O de simetría de la figura, resulta fácilmente $AO = OC = ½ (a + b)$ y $DO = OB = ½ (a - b)$ y, por lo tanto, de $AB = AO + OB$ y $AD = AO - OD$ se desprenden las relaciones entre dos números, su semisuma y su semidiferencia, que los babilonios utilizaron en sus problemas.

Supongamos ahora que en pos de conjeturas elevamos al cuadrado la figura y obtenemos el cuadrado de lado AC descompuesto en cuadrados y rectángulos. Así:

$$(a + b)^2 = AE;\ (a - b)^2 = FG;\ ab = LI = IM = DL$$

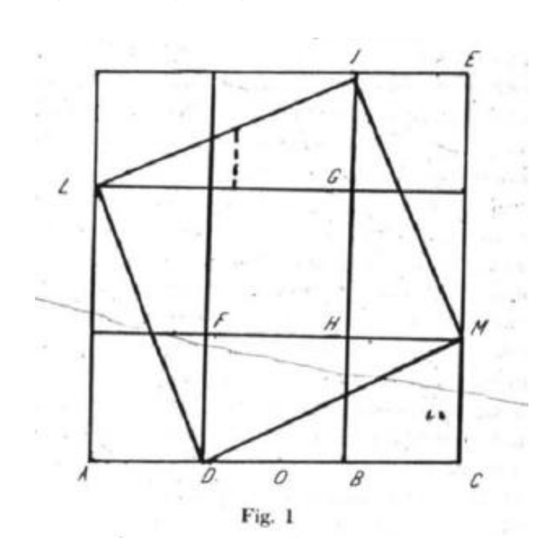


Fig. 1

Y distintas composiciones de esas figuras llevan a las identidades:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\ ;\ (a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2;$$

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

ó

$$[1/2\ (a + b)]^2 - [1/2\ (a - b)]^2 = ab$$

que los babilonios utilizaron en la resolución de sus ecuaciones cuadráticas.

Hagamos un paso más y tracemos las diagonales *LI, IM, MD, DL* de los rectángulos que bordean la figura que no serán sino las hipotenusa c de los triángulos rectángulos de catetos a y b, y por tanto el cuadrado *LM = DI* es el cuadrado construido sobre esa hipotenusa. De la figura se deduce una propiedad geométrica que los babilonios parece que no utilizaron, como lo hará en cambio más tarde Diofanto; esa propiedad dice que si al cuadrado de la hipotenusa se le suma o se le resta cuatro veces el triángulo se obtiene, en ambos casos, un cuadrado, o en símbolos $c^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$, propiedad que implícitamente contiene el llamado "teorema de Pitágoras", aunque el teorema puede obtenerse directamente utilizando una de sus numerosas "demostraciones" por descomposición de figuras; así, por ejemplo, una demostración muy simple, que aparecerá en escritos árabes del s. IX, consiste en suprimir del cuadrado *DI* los triángulos *LGI* e *IHM*, desplazándolos respectivamente a *DCM* y *LAD*; el cuadrado *DI* se convierte en la figura equivalente *LGHMCAL*, suma de los cuadrados *AG* y *BM* de los catetos.

Como curiosidad agreguemos que el matemático Hamilton del siglo pasado al reproducir esa demostración sombreó en la figura *LIMCAL* esos cuatro triángulos, inscribiendo en el pentágono cóncavo *LGHMDL* una leyenda que parafraseamos: Como se ve: Soy $a^2 + b^2 - ab$; si me adoso los dos triángulos compongo el cuadrado de la hipotenusa, si me sustento sobre los dos triángulos, compongo la suma de los cuadrados de los catetos.

Una última conjetura nos llevaría a los tripletes pitagóricos. De la propiedad $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ se puede llegar a la descomposición de un cuadrado en suma de los cuadrados, es decir, a la ecuación pitagórica (¿o habría que llamarla seudo-pitagórica?) $x^2 + y^2 = z^2$, sin más que tomar para a y b números cuadrados m^2 y n^2, llegándose a las expresiones $x = m^2 - n^2$;

$y = 2mn$; $z = m^2 + n^2$, con las cuales se ha construido la tabla del Plimpton 322.

Conjeturas de otra índole merecerían las consideraciones acerca de la finalidad que persiguieron sumerios y babilónicos con su sorprendente álgebra. Sin duda en sus albores la matemática nació bajo los signos que Spranger señalo al calificar de semi-juego y semi-religiosidad, pero en el álgebra de los babilónicos la atmósfera técnica que envuelve a sus problemas revela también aspectos más positivos, menos místicos. Una hipótesis verosímil, que la índole de los problemas corroboraría fija a los textos matemáticos de los babilonios une finalidad formativa: su estudio y práctica serían considerados indispensables en el aprendizaje y adiestramiento de escribas y funcionarios de pueblos de un avanzado desarrollo comercial.

Notas complementarias

(1) Un problema de primer grado. He aquí un ejemplo del tipo de problema de mezclas en el que además se utilizan unidades de medidas agrarias de la época. Se conocen la extensión total (1.800) de un campo compuesto de dos parcelas, en cada una de las cuales el rendimiento del grano por unidad de área está afectado por coeficientes diferentes ($^2/_3$ y $^1/_2$). Se desea saber la extensión de cada parcela conociendo la diferencia (500) del producido de la cosecha. De acuerdo con nuestros símbolos el problema exige la resolución del sistema de dos incógnitas:

$$x + y = 1.800 \; ; \; 2/3\, x - ½\, y = 500$$

de solución $x = 1.200$; $y = 600$

Aunque la marcha que sigue el calculista no es clara y aparentemente presupone un método de falsa posición, en realidad, los cálculos encierran un proceso correcto en el cual implícitamente se hace intervenir, al lado de la suma conocida de

las incógnitas, su diferencia desconocida $x - y = 2z$. En efecto, el calculista comienza admitiendo que las dos parcelas son iguales (a la semisuma 900) y con esa hipótesis falsa llega al valor erróneo de la diferencia de producido: 150 (es decir $\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ de 900). Para compensar el error de 350 = 500 – 150 reconoce, sin decirlo, que ese error es los $\frac{7}{6}$ (suma de $\frac{2}{3}$ y ½) del valor que, sumado y restado al dato inicial erróneo, dará la extensión de parcelas. Para obtener aquel valor deberá dividir 350 por $\frac{7}{6}$, operación que, por la presencia del factor 7, las tablas no facilitan; el calculista obvia la cuestión preguntándose simplemente por cuanto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350; su respuesta es obvia: 300, y este dato, sumado y restado a 900, da los valores de las incógnitas. Es fácil ver que, aun con un lenguaje de valores erróneos, la marcha del proceso es la que hoy se seguiría si se introducen los valores $x = 900 + z$, $y = 900 - z$, y se calcula z de acuerdo con la segunda ecuación.

(2) Un problema de segundo grado. He aquí el enunciado de un ejercicio típico tomado de una tablilla de los babilonios: Largo y ancho. He multiplicado largo y ancho y he obtenido el área. He agregado al área el exceso del largo sobre el ancho: 183, además he sumado largo y ancho: 27. Se pide largo, ancho y área. Este problema, al sumar áreas y longitudes absurdo desde el punto de vista práctico, revela claramente que su interés es exclusivamente técnico o numérico. Con nuestros símbolos el problema lleva el sistema de segundo grado: $xy + x - y = 183$; $x + y = 27$, y aunque pueda parecer anacrónico conviene seguir con nuestros símbolos la marcha de los cálculos que señala la tablilla, para poner de manifiesto su carácter algebraico. El calculista comienza por sumar los dos datos numéricos $183 + 27 = 210$, $[x(y + 2) = 210]$ y agrega 2; $(x + y + 2 = 29)$. Lo que sigue es el método actual de nuestra resolvente para obtener los valores de dos números (en este caso x e $y + 2$), conociendo su suma 29 y su producto 210. En efecto, toma la mitad de 29: 14 ½ de cuyo cuadrado resta 210, obteniendo ¼, cuya raíz cuadrada ½ suma y resta a 14 ½ obteniendo los valores 15 y 14, de este último resta 2, llegando a la solución del problema: 15, 12, 180.

Por supuesto que el calculista no advirtió la existencia de una segunda solución $x = 13$, y $y = 14$, por cuanto estos problemas, por su probable carácter didáctico son problemas artificiales con soluciones preparadas de antemano y son estas soluciones las que se buscan y no otras.

(3) Un problema de interés compuesto. Se trata del clásico problema de la determinación del tiempo en que se duplica un capital, a una determinada tasa de interés compuesto. En el caso de la tablilla esa tasa el del 20 %, dato que a la par que puede interesar a la historia económica de esos pueblos, facilita bastante la solución aritmética. El problema es trascendente y exige la solución de la ecuación exponencial $1{,}2^x = 2$, para lo cual el calculista después de comprobar que x esta entre 3 y 4 y más próximo a 4 que a 3, determina el incremento $4 - x$ mediante la proporción de los incrementos ofreciendo quizás el primer ejemplo de la aplicación del más tarde llamado método de falsa posición. De acuerdo con esta hipótesis, aquel incremento está dado por el cociente

$$(1{,}2^x - 2) \div (1{,}2^x - 1{,}2^x)$$

que da el tiempo de doble capitalización con error (por defecto) inferior a seis días.

(4) El teorema de Pitágoras. Varios problemas de las tablillas son variantes de un problema frecuente en el folklore matemático: el problema de la caña, cuya solución exige el conocimiento del teorema de Pitágoras. Veamos un caso simple: una caña que se apoya en una pared de igual altura que ella de desliza sin caer. Calcular su altura x conocido el deslizamiento a de su tope y la distancia b en que se ha apartado el pie de la caña respecto de la pared. Este problema, que equivale a la determinación del radio de un círculo del cual se conoce una semicuerda y la flecha respectiva, exige la aplicación del teorema de Pitágoras que da por solución $x = ½ (a^2 + b^2) \div a$; y son estos cálculos, efectivamente, los que efectúa el calculista babilónico partiendo de $a = 3; b = 9$, obteniendo $x = 15$.

(5) El texto Plimton 322. (Se reproduce a continuación el texto de la tablilla en signos modernos, tomados de O. Neugebauer. *The Exact Sciences un Antiquity*. Nueva York, Dover, 1969, pág. 37) Se trata de la parte derecha de una tablilla mutilada que comprende a cuatro columnas: la primera, a partir de la derecha, no contiene sino los números 1 a 15 para ordenar las filas; la segunda y tercera, encabezadas respectivamente con palabras "diagonal" (d) y "ancho" (b), contienen números enteros aparentemente sin orden alguno, mientras que la cuarta columna, encabezada por un término ininteligible, contiene expresiones fraccionarias, a veces hasta con siete fracciones sexagesimales. Descifrada la tablilla, el resultado fue que las columnas (d) y (b) comprenden los componentes de tripletes pitagóricos correspondientes a la hipotenusa y a un cateto, es decir, $d = m^2 + n^2$ y $b = m^2 - n^2$, cuyo otro cateto $b = 2mn$, del cual sus valores, que figurarían probablemente en la parte que falta, deben cumplir la condición de no contener sino divisores de 2, 3, 5, circunstancia que explicaría el aparente desorden de las columnas d y b, pues la cuarta columna contiene los valores numéricos de $(d/a)^2$, es decir, con nuestro léxico los valores de $\sec^2 \alpha$ siendo α el ángulo opuesto *a*. Agreguemos que los valores de la cuarta columna decrecen de manera casi lineal, así como los valores de α decrecen bastante uniformemente entre 45° y 31°, lo que hace suponer que otras tablillas contendrían los valores correspondientes a los otros sectores de 15°,

Por ejemplo, en la fila sexta los valores de las tres columna son en el sistema sexagesimal,

$$d = 8{,}1 \ ; \ d = 5{,}19 \ ; \ (d/a)^2 = 1 \ ; \ 47.6.41.40$$

Es fácil ver que en este caso $m = 20$, $n = 9$: $d = 481$; $b = 319$ resultando $a = 360$, que no figura, pero que cumple con la condición de no contener sino factores 2, 3, 5 y que $(d/a)^2 = (481/360)^2$ expresado en el sistema sexagesimal es precisamente el valor que aparece en la cuarta columna. Para estos valores α es aproximadamente 40°.

I	II (= b)	III (= d)	IV
[1,59,0,] 15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

Los egipcios

Comparada con el contenido de las tablillas de los babilonios, la matemática de los egipcios resulta de un nivel muy inferior. Una de las causas reside en el sistema de numeración adoptado por los egipcios: aditivo decimal compuesto de ocho signos jeroglíficos para indicar la unidad y las primeras siete potencias de 10 y que en el contexto numérico se escribían de derecha a izquierda según las potencias decrecientes.

Con ese sistema, el escriba o calculador egipcio realizaba operaciones aritméticas elementales, con números enteros o fraccionarios, utilizando una técnica operatoria. No exenta de ingeniosidad, de la cual cabe destacar dos notas características: la multiplicación por duplicación y el uso casi exclusivo de fracciones unitarias, es decir, de numerador la unidad.

El conocimiento de los métodos de cálculo de los egipcios y de su aplicación en distintos problemas proviene de algunos papiros,

no muy numerosos, entre los cuales sigue siendo más importante el papiro Rhind (del nombre de su propietario que lo lego al museo Británico) que data de la época de los hiesos (s. XIII a. C) aunque, como nos lo asegura su autor o compilador, el egipcio Ahmes: su contenido proviene de épocas anteriores. Aproximadamente de comienzos del II milenio.

Aunque el papiro declare que contiene "las reglas para lograr un conocimiento de todo lo oscuro y de todos los misterios que residen en las cosas..." es en realidad un manual de aritmética, probablemente destinado a la formación de los escribas oficiales que tenían a su cargo el conocimiento y la práctica de los cálculos que exigía la típica organización económica de la sociedad egipcia. (1)

El interés mayor que ofrece la aritmética de los egipcios reside en su característico uso y manejo de las fracciones. Si se exceptúa $^2/_3$ (y ocasionalmente $^3/_4$), fracción para la cual existía un signo especial y de la cual, por lo demás, conocían la descomposición en $^1/_2$ + $^1/_6$, el calculista egipcio utiliza exclusivamente fracciones unitarias Y. por tanto, todo cociente o parte de un cociente menor que la unidad debía expresarse como suma de fracciones unitarias, problema indeterminado desde el punto de vista teórico y que los egipcios resolvieron empíricamente, aunque tratando de dar, y a veces en forma ingeniosa, la descomposición más simple.

Muchas de esas descomposiciones eran conocidas de memoria por el escriba, pero para denominadores no pequeños la cuestión se tornaba difícil, de ahí que sea explicable que el papiro Rhind se abriera con una tabla que facilitaba esa descomposición dando la misma para todos los cocientes de dividendo 2 y divisor impar desde 5 hasta 101. (2)

El conocimiento aritmético de los egipcios no se limita a las operaciones elementales con enteros y fracciones: en los papiros matemáticos aparecen progresiones aritméticas y geométricas y hasta algún ejemplo de raíz cuadrada. En cuanto a las aplicaciones se trata en general de problemas de repartición proporcional o de medidas de capacidad, de superficie o de volumen, así como cuestiones de distinta índole que conducen a problemas de primer grado con una o más incógnitas. (3)

Los conocimientos geométricos de los egipcios son más bien extensos: disponen de reglas exactas para el área de triángulos, rectángulos y trapecios, así como para el volumen de prismas y pirámides. En un ejemplo aparece la determinación de la inclinación del plano oblicuo de una pirámide, aunque entendida más como factor de proporcionalidad que medida angular, mientras que el máximo logro de la geometría egipcia debe verse en la determinación correcta del volumen del tronco de pirámide de base cuadrada, mediante un cálculo de difícil interpretación. Además se debe al calculista egipcio una excelente aproximación para la cuadratura del círculo. (4)

Notas complementarias

(1) La multiplicación y división egipcias. Para multiplicar por duplicación el egipcio escribía en columna el factor mayor y sucesivamente sus dobles, mientras que en otra columna la izquierda señalaba la unida y sus dobles. La operación se suspendía al llegar el mayor doble inferior al segundo factor; el calculista marcaba entonces con un signo especial los dobles cuya suma componían este segundo factor y sumaba los términos correspondientes de la primera columna. Esa suma es el resultado. A la izquierda puede verse el producto 34 x 27 = 918.

/1	34
/2	68
4	136
/8	272
/16	544
27	818

Para abreviar la operación en algunos casos se multiplicaba por 10 y a veces este múltiplo se dividía por 2 con lo cual, en la columna de la izquierda, además de dobles, aparecían los números 10 y 5, que había que tomar en cuenta en el cálculo del segundo factor.

Para dividir procedían como en la multiplicación considerando la división como una multiplicación de producto y un factor

conocidos. Dividir por ejemplo 1.120 por 80 es una multiplicación "comenzando con 80". A la izquierda está indicado el cálculo que se ha facilitado comenzando por tomar el décuplo del divisor. Como en este caso, de la columna de la derecha se obtiene la suma 1.120, el resultado es de una división exacta 1.120 ÷ 80 = 14.

¿Pero qué hubiera ocurrido si en lugar de 1.120 el dividendo hubiera sido 1.150? Con nuestro léxico, de los cálculos anteriores hubiéramos deducido que el cociente entero es 14 y el resto es 30, pero en las divisiones egipcias no hay resto: el cociente es siempre exacto, para lo cual en este caso se hubiera acudido a las fracciones y proseguido la operación introduciendo en la columna de la izquierda las fracciones $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, y con los correspondientes valores 40, 20, 10, se habría llegado a la suma exacta 1.150 y al cociente exacto 14 $^{1}/_{4}$ $^{1}/_{8}$

.

1	80
/10	800
2	160
/4	320
14	1.120

(2) Las fracciones unitarias. El ejemplo anterior, donde los valores cómodos 80 y 30, del divisor y el resto, facilitaron sobremanera las operaciones, no es un ejemplo adecuado para mostrar los cálculos egipcios con fracciones unitarias, ya para construir la tabla de los cocientes *2 ÷ n*, ya para utilizar sus datos.

Así señalaba Van der Waerden la marcha del proceso en la, obtención del cociente $^{2}/_{31} = {}^{1}/_{20}\,{}^{1}/_{124}\,{}^{1}/_{155}$. El calculista ha utilizado la fracción auxiliar $^{1}/_{20}$ reconociendo que $^{31}/_{20} = 1\,{}^{1}/_{2}\,{}^{1}/_{20}$. Conociendo además la descomposición $^{1}/_{4} = {}^{1}/_{5}\,{}^{1}/_{20}$ y que evidentemente 2 = 1 $^{1}/_{2}\,{}^{1}/_{4}\,{}^{1}/_{4}$

, mediante un proceso de "completar la unidad" llega a la descomposición 2 = 1 $^{1}/_{2}\,{}^{1}/_{20}\,{}^{1}/_{4}\,{}^{1}/_{5}$ y como $^{1}/_{4}\,{}^{1}/_{5}$ = 31 ($^{1}/_{120}\,{}^{1}/_{155}$) se llega a la descomposición de la tabla.

Supongamos que haya que dividir 11 por 23. El calculista procedería así: $^{11}/_{23} = {}^{1}/_{23}\,{}^{10}/_{23} = {}^{1}/_{23}\,{}^{5\cdot 2}/_{23}$ acudiría a la tabla que descompone $^{2}/_{23} = {}^{1}/_{12}\,{}^{1}/_{276}$, y seguiría

$$^{11}/_{23} = {}^{1}/_{23}\,{}^{5}/_{12}\,{}^{5}/_{276} = {}^{1}/_{23}\,{}^{1}/_{12}\,{}^{1}/_{276}\,{}^{1}/_{3}\,{}^{1}/_{69}$$

Sin necesidad de volver a la tabla, y el resultado sería

$$^{11}/_{23} = {}^{1}/_{3}\,{}^{1}/_{12}\,{}^{1}/_{23}\,{}^{1}/_{69}\,{}^{1}/_{276}$$

1	2/3	1/30			
/2	1	1/3	1/15		
4	2	2/3	1/10	1/30	
/8	5	1/3	1/5	1/15	
10	6	2/3	1/5	2/15	= 7

Consideremos por último el problema de dividir 7 panes entre 10 personas. Sin explicación alguna el papiro da el resultado: $^{2}/_{3}\,{}^{1}/_{30}$ y se dispone a comprobarlo mediante la multiplicación de ese dato por 10 tal como se ve en la izquierda. Al multiplicar por 4 aparece el cociente 2 ÷ 15 que la tabla da como $^{1}/_{10}\,{}^{1}/_{30}$. En este caso no hubo que acudir más a la tabla.

(3) Problemas de primer grado. He aquí un par de problemas de primer grado resueltos por los egipcios. Una cantidad y su séptima parte dan 19. Para resolverlo, el calculista toma sucesivamente 7 más 1, es decir, 8. Divide 19 por 8 obteniendo 2 $^{1}/_{8}\,{}^{1}/_{4}$ y este resultado lo multiplico por 7, obteniendo 16 $^{1}/_{2}\,{}^{1}/_{8}$ que es la cantidad buscada, comprobándolo al agregarle 2 $^{1}/_{4}\,{}^{1}/_{8}$, y obtener 19.

Menos simple es el problema de dividir 100 panes entre cinco personas siguiendo una progresión aritmética (serian de distintas clases sociales), de manera que la parte de las dos últimas sea $^{1}/_{7}$ de las partes de las tres primeras. Aquí escuetamente el papiro dice: 'Toma como diferencia 5 $^{1}/_{2}$, de donde 23, 17 $^{1}/_{2}$, 12, 6 $^{1}/_{2}$, 1. Aumenta esos números en la proporción 1 $^{2}/_{3}$ y obtendrás las partes que corresponden a cada persona". Y la solución es correcta.

En efecto, el número 5 $^{1}/_{2}$ es la razón entre la diferencia de la progresión y la parte de la última persona, que puede deducirse de los datos del problema, pues las dos últimas personas reciben dos de esas partes más una diferencia, mientras que las tres siguientes reciben 3 de esas partes más 9 diferencias, que han de ser equivalentes a 14 partes y 7 diferencias, de ahí la razón $^{11}/_{2}$, es decir, 5 ½. Admitiendo que la última parte es 1 pan la suma, de acuerdo con la diferencia 5 ½, daría 60 panes y no 100 como exige

el problema; de ahí la última parte de la solución el elevar los valores anteriores en la proporción de 60 a 100, es decir, en la proporción 3 a 5.

(4) La cuadratura del círculo. La regla del calculista egipcio para obtener el área del círculo, consiste en adoptar como lado del cuadrado equivalente al círculo el diámetro menos un noveno del mismo, lo que significa para nuestro π el valor $^{256}/_{81} \approx$ 3,1604…bastante aproximado con un error relativo por exceso de 0,6 %. En cuanto al origen de esta regla observamos que si hoy deseáramos conocer qué fracción del diámetro, de la forma *1– 1 / n* debe tomarse para obtener el lado del cuadrado equivalente encontraríamos para *n* el valor 8,7…bastante próximo a 9, de ahí que cabe sospechar que los egipcios obtuvieron su regla operando por tanteos con fracciones unitarias y complementos a la unidad.

LA MATEMÁTICA HELÉNICA

Los griegos

Un largo milenio transcurre entre la época de las tablillas cuneiformes y de los papiros egipcios que hemos reseñado, y la época de la revolución intelectual que tendrá por teatro el mundo griego del Mediterráneo oriental; revolución que significó el advenimiento del sabio y de un saber cada vez más consciente de su propia misión y de la responsabilidad que le impone la exigencia de su comprobación o de su verificación.

Al hacerse referencia al nacimiento de este nuevo tipo de saber: la ciencia, suele aún hablarse de "milagro griego", expresión que encierra la idea de un surgimiento de la ciencia, del arte y de la filosofía como de la nada, por generación espontánea.

Más hoy, al respecto, y en especial para la matemática, cabe ser cauteloso. Por lo pronto, la ciencia prehistórica ha puesto de relieve el largo camino recorrido por el hombre en la senda del saber hasta llegar a los umbrales de la ciencia. Por su parte, ya no es posible dejar de considerar que el "milagro griego" tuvo como antecedente el saber que desarrollaron los países orientales, en especial Egipto y la Mesopotamia. La misma tradición griega atestigua la importancia que los primeros griegos atribuían a ese saber y es significativo que, según tal tradición, grandes sabios y filósofos del período helénico habían estado en Oriente, en especial en Egipto, frecuentando los sacerdotes de esa región.

Otro factor que ha contribuido a mantener la creencia en el "milagro griego" proviene de las características del período inmediato anterior al advenimiento de la ciencia griega, allá hacia el siglo VI a. C. En efecto, el medio milenio anterior a este siglo es una de las épocas más oscuras e inciertas de la historia del Mediterráneo, aunque tal oscuridad no proviene de causas intrínsecas, sino del hecho de tratarse de una época de movimientos de pueblos y de la aparición de las armas de hierro

que aportaron un poder destructor desconocido hasta entonces; movimiento y destrucción que han contribuido a silenciar ecos y documentos que podrían informarnos acerca de los orígenes de la ciencia en Grecia.

Por lo demás, en este período, Grecia mantuvo relaciones comerciales y bélicas con los pueblos del Cercano y Medio-Oriente, y si bien es cierto que los griegos no supieron leer las jeroglíficos egipcios ni los signos cuneiformes, el hecho de desconocer el idioma no significa ignorar totalmente sus bienes culturales y las conexiones que actualmente se advierten entre la matemática griega y la antigua matemática de los babilonios, como consecuencia de las tablillas descifradas en este siglo, comprobarían tal afirmación.

Una última observación, de carácter más bien paradójico, reafirma la cautela con la cual deben tomarse las informaciones relativas a la antigua matemática griega. En efecto, mientras hoy a 30 ó 40 siglos de distancia, conservamos en las tablillas cuneiformes y en los papiros egipcios documentos originales o copias fieles de las contribuciones matemáticas de los antiguos pueblos orientales, nada de eso ocurre con los griegos; a pesar de ser mucho más recientes, pues de las no muy numerosas producciones matemáticas que han sobrevivido hasta hoy, sólo disponemos de copias y compilaciones tardías a veces posteriores en varios siglos, cuando no meras traducciones.

Esto es particularmente cierto para la matemática del periodo helénico (siglos VI a IV a. C.), ya que de los escritores anteriores a Euclides no se conoce sino el fragmento, relativo a las "lúnulas" de Hipócrates, de la "historia de la matemática" de Eudemo de Rodas, que, a su vez, se conoce mediante una reproducción no muy fiel, aparecida en un comentario aristotélico de Simplicio del s. VI, es decir, de un milenio después.

De ahí que la historia de la matemática del periodo helénico haya sido reconstruida sobre la base de fuentes indirectas, informaciones dispersas en autores de la época posteriores, en especial, en los escritos de comentaristas del último período de la ciencia griega, entre los que cabe destacar el resumen histórico, que aparece en *Los comentarios del libro 1 de los Elementos de*

Euclides de Proclo; probablemente fundado también en la “historia" de Eudemo. (1)

En este resumen, al lado de figuras conocidas de la filosofía y de las ciencias griegas, aparecen nombres de los cuales se tienen escasas o ninguna noticia. Faltan, en cambio, nombres importantes como el de Demócrito de Abdera, omisión que se explica en vista de la tendencia neoplatónica de Proclo. Contraria a las concepciones filosóficas de Demócrito. Pero, salvadas esta y otras lagunas, ese resumen histórico señala en líneas generales el proceso seguido por la matemática griega durante el periodo helénico.

Notas complementarias

(1) El resumen histórico de Proclo. Cuenta Proclo en la segunda parte del Prólogo a sus comentarios;…muchos autores informan que los egipcios fueron inventores de la geometría, que nació de la medida de los campos, necesarias debido a las crecidas del Nilo que borraban el límite entre las propiedades. Por lo demás, no ha de asombrar que haya sido una exigencia práctica la determinante de la invención de esa ciencia, pues todo lo que está sujeto a la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto, y que es natural que se produzca una transición de la sensación al razonamiento y de este a la inteligencia. De manera que así como los fenicios, debido al intercambio y transacciones comerciales, fueron los primeros en tener un conocimiento cabal de los números, por la razón mencionada los egipcios inventaron la geometría.

Tales que estuvo en Egipto, fue el primero que introdujo la teoría en Grecia; él mismo realizo varios descubrimientos y encamino a sus sucesores hacia sus principios; algunas cuestiones las resolvió de una manera más general; otras de una manera más intuitiva. Después de él se menciona a Mamerco, hermano del poeta Estesicoro que se interesó por la geometría, a la cual debió su fama, según cuenta Hipias de Elis.

Los siguió Pitágoras quien trasformó él estudió de la geometría en una enseñanza liberal, remontándose a los principios generales

y estudiando los teoremas abstractamente y con la inteligencia pura; se le debe el descubrimiento de las figuras cósmicas. Más tarde Anaxágoras de Cazomene se ocupó de distintas cuestiones geométricas así como Enópides de Quíos, algo más joven que Anaxágoras, ambos mencionados por Platón en *Ricales* como famosos matemáticos. Más tarde, fueron célebres en geometría Hipócrates de Cirene; Hipócrates además fue el primero que compuso *Elementos*.

Platón, que los sigue, dio a la geometría, como a toda la matemática, un impulso extraordinario mediante el gran interés que demostró por ella, del cual dan fe sus escritos repletos de consideraciones matemáticas, que en todo momento despiertan la admiración hacia esa ciencia de aquellos que se consagran a la filosofía.

Al mismo período pertenecen Leodema de Taso, Arquitas de Tarento y Teeteto de Atenas, que aumentaron el número de teoremas de geometría, mientras le deban una forma más científica. A Leodemas sigue Neoclides y el discípulo de éste: León, que acrecieron el saber geométrico de manera que León pudo escribir unos *Elementos*, muy superiores por el valor y el número de sus demostraciones. León además descubrió las distinciones que indican si un problema puede resolverse o no.

Algo más joven que León, y compañero se los discípulos de Platón, es Eudoxo de Cnido, quien aumento el número de los teoremas geométricos, agrego tres nuevas proporciones a las tres antiguas, y mediante el análisis hizo progresar lo que Platón había aprendido respecto de la sección. Amticlas de Heraclea, discípulo de Platón, y Menecmo, discípulo de Eudoxo como miembro del círculo de Platón, y su hermano Dinotrasto perfeccionaron aún más la geometría en su conjunto. Teudio de Magnesía gozó de gran renombre tanto en matemática cuanto en otra doctrina filosófica, pues coordino Elementos y generalizo muchas cosas particulares. Igualmente Ateneo de Cicico, de la misma época, se hizo célebre como matemático y en especial como geómetra. Todos ellos se congregaban en la Academia e instituyeron en común sus investigaciones. Hermotimo de Colofón desarrolló lo que había encontrado Eudoxo y Teeteto, descubrió muchas proposiciones relativas a los Elementos y se ocupó de los lugares. Filipo de

Mende, discípulo de Platón e iniciado por éste en la matemática, realizó investigaciones siguiendo las indicaciones de su maestro, aunque se propuso también todas aquellas cuestiones que según su entender podían contribuir al desarrollo de la filosofía de Platón. Es hasta estos últimos que se han ocupado los historiadores que trataron el desarrollo de la geometría.

Tales

La matemática griega comienza con el mismo nombre con que se inicia la filosofía griega: Tales de Mileto, uno de los "siete sabios de Grecia", primero a quien se dio ese nombre, no ya por su género de vida y sus preceptos con referencia a la conducta moral, sino por el hecho de estudiar los secretos de la naturaleza y hacer conocer sus investigaciones.

En efecto, Tales, como sus conciudadanos más jóvenes: Anaximandro y Anaxímenes, fue un filósofo de la naturaleza, un "fisiólogo" que por sus observaciones empíricas sobre los seres, sobre las cosas y sobre los fenómenos, en especial meteorológicos, llego a la concepción de estar todo el Universo sometido a un proceso, a una transformación continua, como si algo viviente lo habitase ("Todo está lleno de dioses"), proceso y transformación cuyo origen, causa y devenir busca ("el agua es el principio de todas las cosas, pues todo proviene del agua y todo se reduce a ella").

Como en todos los casos de los pensadores antiguos, no se dispone de Tales sino de escasas referencias debidas a comentaristas muy posteriores, pero cabe destacar que es el único entre los filósofos de Mileto a quien se atribuyen conocimientos científicos en sentido estricto: ya astronómicos, ya matemáticos.

Así, se le atribuye la predicción de un eclipse de sol que, según los astrónomos modernos, fue el del 28 de mayo de 585 a. C. (fecha esta última que, aun convencional, puede servir para fijar el nacimiento de la ciencia griega), eclipse que reviste un singular interés histórico, pues ocurrió cuando medas y lidios estaban por

entrar en batalla, que el fenómeno celeste detuvo, y facilitó gestiones de paz.

Actualmente se duda de tal predicción por parte de Tales, en vista de la propia concepción cosmológica que se le atribuye, y de los conocimientos teóricos que exige, salvo que estuviera en posesión de reglas de los antiguos babilonios, lo que no es muy verosímil. Más verosímil resulta suponer que la predicción del eclipse no fue sino una atribución gratuita, consecuencia de la fama y de la popularidad alcanzadas por Tales en su condición de sabio.

Algo semejante podría decirse con respecto a las contribuciones matemáticas, o mejor geométricas, que se atribuyen a Tales y que consisten en algunas propiedades teóricas y en un par de problemas prácticos, (1) cuyo interés reside esencialmente en que tanto unas cuanto otros se refieren a propiedades generales de rectas, igualdades entre ángulos, y semejanzas de figuras, es decir, propiedades cuya índole las distingue del conocimiento empírico de los egipcios, con el cual directa o indirectamente Tales pudo entrar en contacto.

También aquí, como en el caso de la predicción del eclipse, la atribución de conocimientos geométricos teóricos puede fundarse en la fama de la que Tales gozó en vida y que, sin duda, se trasmitió deformada a las generaciones posteriores. Más también puede dársele un sentido distinto, vinculado con la revolución intelectual que se estaba produciendo en el mundo griego en tiempos de Tales: el nacimiento de un nuevo saber.

La nota esencial de ese nuevo saber fue su acentuado carácter discursivo, su tónica racional, que en sus comienzos se manifestó meramente en los intentos de explicación de los fenómenos naturales sin acudir a causas extra-naturales, pero que pronto adquirió una sólida consistencia y logró conquistas perdurables en la rama más fecunda y más dócil a los dictados de la razón: en la matemática, mediante la demostración rigurosa de sus propiedades, traducción en su campo de la explicación de los fenómenos naturales. Y si Tales, el "primero entre los siete sabios", había sido también el primero, cronológicamente, en poner de manifiesto las exigencias de la razón en el campo, de la naturaleza mediante la "explicación racional de sus fenómenos", ¿por qué no dotarlo de igual capacidad en el campo matemático, atribuyéndole

el invento de la "demostración", en vista de la similitud de los fundamentos de ambos procesos? Sean o no exagerados los méritos que, las generaciones futuras asignaron a Tales, es indudable que termina con él una etapa en la marcha del saber: la etapa pre-científica, para iniciarse el período del saber crítico, objetivo, científico.

Varios factores contribuyeron al advenimiento de esta especial conciencia científica que ante todo significó una liberación, aún no total, de la maraña de elementos extra-científicos que envolvían al saber oriental. Por un lado, el carácter del pueblo griego, pueblo de legisladores y de colonizadores que, en contacto con pueblos orientales de larga tradición cultural, heredaron de ellos lo que ofrecían más objetivo: el saber. Ese pueblo disponía además de un idioma que una estupenda tradición literaria, casi familiar, había tornado bastante flexible como para permitirle lanzarse a nuevas aventuras. Si en esa tradición figuraba un poeta épico como Homero, también incluía un poeta más didáctico como Hesíodo y, por tanto, más afín con el saber.

También pudo haber contribuido al movimiento de libación la índole especial de la religión griega, con su antropomorfismo y la vinculación de sus mitos, dioses y cultos con fenómenos naturales, así como los juegos olímpicos, que se inician en el siglo VIII a. C. en los que lo colectivo, representado por sus facetas religiosas y nacionales, se combina con lo individual, encarnado en el reconocimiento de los propios méritos y en la libertad y valores personales.

Por último, cabe acentuar el carácter especial de la cuna del nuevo saber: la ciudad de Mileto, nudo de rutas comerciales y floreciente mercado, ubicada en las costas de una región como el Asia Menor, rica en razas y culturas diferentes; factores todos que permitieron a los milesios ponerse en contacto con pueblos y problemas diversos que estimularon su actividad intelectual.

Notas complementarias

(l) Las contribuciones geométricas de Tales. Según constancias posteriores, se atribuyó a Tales la demostración de los siguientes teoremas: Todo diámetro biseca a la circunferencia. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales. Ángulos opuestos por el vértice son iguales. Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos; y la resolución de los problemas: Determinar la distancia de una nave al puerto. Determinar la altura de una pirámide conociendo la sombra que proyecta: problemas cuya solución exigió a su vez el conocimiento de la igualdad de los triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, y la proporcionalidad de los lados homólogos de dos triángulo, semejantes.

Respecto de esta última propiedad cabe recordar que en papiros egipcios y en tablillas cuneiformes se encuentran aplicaciones numéricas de las propiedades de los triángulos semejantes, pero tales aplicaciones prácticas no presuponen el conocimiento previo de la demostración teóricas de ellas. De ahí que de atribuir alguna contribución original de Tales al respecto, debería referirse a la deducción racional de esas propiedades, pero nada de eso aparece en las referencias disponibles, donde a lo sumo se indica el método utilizado, por ejemplo, midiendo la sombra proyectada por la pirámide en el instante en que la propia sombra del operador era igual a la altura de su cuerpo. Pero aun en este caso, fundado sobre un método de comprobación intuitiva, nada prueba que Tales haya demostrado el teorema que, con frecuencia, lleva su nombre en los textos elementales de geometría, pero cuya primera demostración, nada fácil, aparece en el libro VI de los *Elementos* de Euclides.

Al respecto de esta inconsistencia histórica cabe citar la feliz "boutade" del matemático Félix Klein, quien recordaba que si un teorema lleva el nombre de un matemático, es seguro que este matemático no es su inventor. Tal cosa ocurre precisamente con el teorema de Tales y, puede agregarse, con el "teorema de Pitágoras"; el "binomio de Newton", el triángulo de Pascal...

Los pitagóricos

El juego de la razón y la índole del ente primordial capaz de engendrar todas las cosas, son los fundamentos que caracterizan a las corrientes filosóficas que alimentan el pensamiento helénico.

En cierto sentido diríase que la geografía influyó en esas corrientes. Mientras que de las colonias de Asia Menor provienen los "fisiólogos" con su acentuada tendencia hacia "la naturaleza de las cosas", fincada en entes de consistencia natural: agua, aire, fuego...; de las colonias itálicas provendrá una corriente más mística con un ente primordial de naturaleza ambivalente, como habitante de dos mundos: del mundo de la razón y del mundo de las cosas. Ese nuevo ente fue el número y sus artífices fueron los pitagóricos o itálicos.

Si las figuras de los fisiólogos son legendarias, también lo es y quizá con mayor razón la de Pitágoras, filósofo que habría vivido a lo largo de gran parte del siglo VI a. C. y cuya vida y doctrinas han sido deformadas por la atmósfera mística que las envolvió, contribuyendo sin duda a esa deformación la imposición del secreto y del silencio místicos que regían en la escuela que había fundado Pitágoras, en especial, en lo referente a los conocimientos.

Pitágoras y su escuela pertenecen por igual a la ciencia y a la filosofía, a la mística y a la política; pues Pitágoras no fue sólo un filósofo, sino también un sacerdote de ritos arcaicos y hasta un político, pues fueron las luchas políticas de mediado, del siglo V a. C. las que provocaron la destrucción de la escuela fundada por Pitágoras en Crotona (Italia) y la emigración de los pitagóricos y de sus doctrinas a la metrópoli, donde hacia esa época comenzaron a difundirse.

No es fácil reconstruir el camino que del misticismo pitagórico condujo a las verdades matemáticas. Se ha querido ver una influencia del orfismo y del poder especial que ese mito otorgaba a la música, así como a la vinculación existente entre la armonía musical y la armonía reflejada en los números, vinculación fortalecida por el descubrimiento que se atribuye a Pitágoras de la relación simple entre las longitudes de las cuerdas de la lira y los

acordes de los sonidos emitidos por sus vibraciones. En efecto, cuando la longitud de la cuerda se reducía a la mitad, es decir, en la relación 1:2, se obtenía la octava; si en cambio las relaciones eran 3:4 ó 2:3 se obtenían, respectivamente, la cuarta y la quinta. Si se agrega que en estas relaciones simples aparecen los cuatro primeros dígitos 1, 2, 3, 4, que a su vez dispuestos en forma de pila dibujaban el triángulo equilátero; y que su suma era 10, número místico con propiedades geométricas (por ejemplo, el número de caras y aristas del tetraedro), etcétera, se explica cómo esta combinación de sonidos, números y figuras convirtió al número en "esencia de todas las cosas".

Aristóteles, que prefiere hablar de pitagóricos, no de Pitágoras, expone de esta manera esa conclusión: "Los así llamados pitagóricos, habiéndose aplicado a la matemática fueron los primeros en hacerla progresar, y nutridos de ella creyeron que su principio fuera el de todas las cosas. Ya que los números por su naturaleza son los primeros que se presentan en ella, les pareció observar en los números semejanzas con los seres y con los fenómenos, mucho más que en el fuego, o en la tierra o en el agua (por ejemplo, tal determinación de los números les parecía que era la justicia, tal otra el alma o la razón, aquella otra la oportunidad y, por así decir, análogamente toda otra cosa), y como también veían en los números las determinaciones y las proporciones de las armonías y como, por otra parte, les parecía que toda la naturaleza estaba por lo demás hecha a imagen de los números, y que los números son los primeros en la naturaleza, supusieron que los elementos de los números fuesen los elementos de todos los seres y que el universo entero fuese armonía y número. Y todas las concordancias que podían demostrar en los números y en las armonías con las condiciones y partes del universo y con su ordenación total, las recogieron y coordinaron".

Es posible que un primer resultado de tal coordinación y ordenación, fuera el advenimiento de la matemática, como ciencia, a la sombra de tal concepción metafísica y aliado de tal mística de los números. Por lo menos esto es lo que se deduciría de la frase de Proclo al afirmar que Pitágoras "transformó el estudio de la geometría en una enseñanza liberal remontándose a los principios generales y estudiando los teoremas abstractamente y con la

inteligencia pura ... " De ser así, seria mérito de Pitágoras o de los pitagóricos el de haber convertido el conjunto de los conocimientos matemáticos en una estructura racional deductiva, con la introducción de la demostración como recurso característico de la matemática como ciencia.

En cuanto al tratamiento de esta disciplina en la escuela pitagórica, se dispone de algunos datos, aunque por comentaristas tardíos como San Hipólito del siglo III, quien refiere que en la secta pitagórica los adeptos se distinguían en novicios y en iniciados, Los primeros sólo podían escuchar y callar (exotéricos o acústicos), mientras que los segundos (esotéricos o matemáticos), podían hablar y expresar lo que pensaban acerca de las cuestiones científicas de las que se ocupaba la escuela. De ahí que sea probable que se deba a los pitagóricos el nombre de la nueva ciencia: matemática (de *mathemata* = ciencias) que significa algo que puede aprenderse. También informa San Hipólito acerca de su contenido al decir que los pitagóricos mezclaban astronomía y geometría, aritmética y música. Proclo, un par de siglos después, es más explícito al expresar que los pitagóricos distinguían en la matemática cuatro ramas: la aritmética (de *aritmein* = contar) que consideraba al número en sí, debiéndose entender por número, entre los griegos, nuestros números enteros y faccionarios positivos; (1) la geometría, que consideraba la cantidad ya no discreta sino continua pero también en sí, perdiendo así en consecuencia la palabra “geometría” su antiguo sentido etimológico de "medir la tierra"; (2) la música, como estudio de la cantidad discreta, pero no en sí sino en sus relaciones mutuas; y la astronomía, como estudio de la cantidad continua, no en sí sino en movimiento.

Ya hicimos referencia al llamado "teorema de Pitágoras" que los babilónicos conocían, así como su consecuencia numérica: la ley general de formación de los "tripletes pitagóricos". Es posible que los pitagóricos demostraran el teorema, probablemente por descomposición de figuras, aunque en el estudio de los "triplete” no lograron la generalidad de los babilonios. (3)

Fue el conocimiento de un caso particular del teorema de Pitágoras, quien aportó una consecuencia importante para el destino de la secta cuando no de la matemática toda: el

“descubrimiento de los irracionales”, es decir, el descubrimiento de pares de cantidades diferentes, tales que la mayor no es múltiplo de la menor ni múltiplo de una parte de la menor; y por tanto cuya razón no resulta expresable mediante un número entero ni fraccionario. Si se piensa que los griegos no conocieron otra clase de números y que la matemática pitagórica exigía que el número era la esencia de todas las cosas, se explica que para los pitagóricos aquellas cosas simplemente no existían; el hecho de presentarse en figuras consideradas perfectas, como el cuadrado o muy simples, como el triángulo rectángulo isósceles, así como el carácter tajante y categórico de la demostración que probablemente se desarrolló en el seno de la escuela, tornaron aún más desconcertante el descubrimiento; el hecho es que varias leyendas rodean al suceso, y el secreto se impuso al descubrimiento. (4)

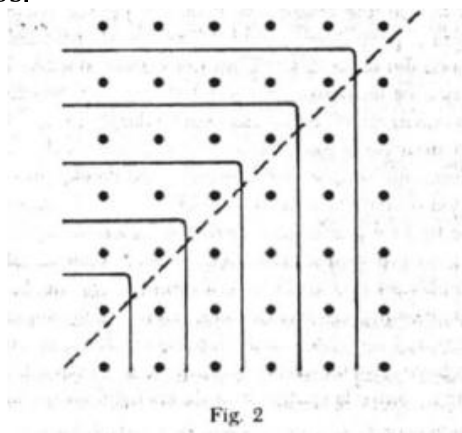
Una visión de conjunto de las contribuciones matemáticas que se atribuyen a los pitagóricos produce una impresión más bien extraña, en vista de que las contribuciones más importantes y numerosas son geométricas, mientras que las contribuciones aritméticas son pobres y escasas, hecho de visos más bien paradójicos si se piensa en la concepción pitagórica de la omnipotencia del número, esencia de todas las cosas.

Una solución de esta aparente contradicción ha sido dada últimamente como consecuencia del desciframiento de las tablillas cuneiformes de este siglo. En efecto, según Neugebauer "lo que se llama pitagórico en la tradición griega debería probablemente ser llamado babilonio", pues los pitagóricos habrán bebido sus conocimientos matemáticos en la aritmética y en el álgebra de los babilonios, pero es natural que imprimieran a esos conocimientos su propio estilo, es decir "el carácter específicamente griego", como se expresa Van der Waerden, anteponiendo al mero carácter operativo e instrumental de los babilonios el rigor lógico y la demostración matemática. Y fue en esa tarea, que el comienzo no encontraría contradicción con la propia metafísica, cuando chocaron con el "escándalo de los irracionales", que los obligó a torcer el rumbo de sus investigaciones abandonando el campo de la aritmética donde los irracionales cerraban el paso a todo proceso, y transformando las consideraciones aritméticas y algebraicas en cuestiones de índole geométrica.

Notas complementarias

(1) La aritmética pitagórica. Dejando de lado todos los fantásticos atributos que los pitagóricos concedían a ciertos números, consideremos algunos resultados positivos que se atribuyen a los pitagóricos en el campo de la aritmética. Por lo pronto, se les debe la distinción entre la aritmética como ciencia o teoría de los números y la logística como arte o práctica de cálculo, separando netamente los números abstractos, esencia de las cosas, de las cantidades concretas, que el hombre maneja en sus transacciones comerciales y en los menesteres ordinarios de la vida. También se les debe la clasificación de los números en vista de sus propiedades aritméticas: pares e impares, perfectos, amigos.

Nuestro léxico actual conserva reminiscencias pitagóricas; las palabras cuadrado y cubo mantienen su doble acepción de número y de figura en inglés *figure* es también cifra. En cambio expresiones de indudable origen pitagórico como las de los "números figurados": triangulares, pentagonales, poligonales,… no conservan sino un interés histórico, aunque ha sido esta aritmogeometría de los números figurados el origen de las primeras propiedades de la teoría de números.


Fig. 2

Véase en la figura siguiente un número de puntos rectangular tal que el número de un lado (la altura) supera en una unidad al otro (la base). Si se descompone en escuadras de carpintero, en la forma indicada por la figura, cada escuadra, o *gnomon* según la

nomenclatura griega, contiene un número par, de ahí la propiedad: la suma de los primeros n números pares sucesivos es el producto de este número por el sucesivo. Si se supone eliminada la fila inferior, el rectángulo se convierte en un cuadrado y cada *gnomon* contiene ahora un número impar, de ahí la propiedad: la suma de los primeros n números impares es el cuadrado n^2 de ese número. Por último, si se supone bifurcado el número rectangular por la línea de puntos, cada mitad se convierte en un número triangular y de ahí la propiedad: la suma de los primeros n números sucesivos es el semiproducto de ese número por el sucesivo. En la figura $n = 6$, de ahí que la suma de los primeros seis pares es $n (n + l) = 42$; la suma de los primeros seis impares es $n^2 = 36$; y la suma de los primeros seis sucesivos *es* $½ \; n (n + 1) = 21$.

También se atribuye a los pitagóricos el conocimiento de las tres medias: aritmética, geométrica y armónica. Esta última designación, resto fósil de las contribuciones de los pitagóricos que aún se emplea en matemática, proviene de que las razones que caracterizan la octava, la quinta y la cuarta musicales pueden formarse con la terna 6, 8, 12 que constituye una terna en progresión armónica. Con nuestros símbolos si, c y h son, respectivamente, las medias aritmética Y armónica de los números a y b, será $c - a = b - c$; $(h - a) : a = (b - h) : b$ o sea $c = ½ \; (a + b)$ y $h = 2ab : (a + b)$.

Por otra parte, se atribuye a los pitagóricos la llamada proporción musical (que según una referencia Pitágoras habría traído de Babilonia), que expresa $a:c = h:b$, o con nuestro léxico: la media geométrica de dos números es la media geométrica de sus medias aritmética y armónica.

(2) La geometría de los pitagóricos. Dos tendencias presiden la geometría de los pitagóricos: por un lado, el sentido de armonía universal que campea en su metafísica y, por el otro, la preocupación casi exclusiva por el estudio de las propiedades de figuras concretas, planas o sólidas, probable herencia de conocimientos orientales pero ahora, claro es, amasados con el método deductivo.

De tal combinación surge la preferencia que se advierte en la geometría pitagórica por los polígonos y poliedros regulares. Así es

de origen pitagórico el teorema que enumera las escasas posibilidades (triángulos, cuadrados, hexágonos) de llenar un área con polígonos regulares. En cambio, la construcción geométrica de esos polígonos exige mayores conocimientos. Si bien tal construcción es muy sencilla cuando se trata del cuadrado y del hexágono: y de los infinitos polígonos que derivan de ellos, la cosa no es tan simple cuando se trata del pentágono. Se sabe, por comentaristas muy posteriores, que los pitagóricos utilizaban, como símbolo de reconocimiento de la secta, un pentágono cóncavo: la estrella de cinco puntas que es un pentágono regular, cuya construcción por tanto conocían. Esa construcción es un caso particular de un grupo de problemas, característicos de la geometría griega, llamados de "aplicación de áreas" y precisamente se sabe por referencias de Proclo que el aristotélico Eudemo de Rodas atribuía a los pitagóricos el descubrimiento y conocimiento de ese tipo de problemas. Pero hoy sabemos algo más pues, en virtud de los conocimientos matemáticos revelados por las tablillas cuneiformes descifradas en este siglo, se comprueba (que muchos problemas numéricos resueltos por los matemáticos babilonios no son sino la contraparte algebraica de los problemas de "aplicación de áreas", circunstancia que pone de relieve una vinculación, sobre la base efectiva de la naturaleza de los problemas, entre la matemática de los babilonios y la de los pitagóricos.

Un ejemplo típico es el problema de dividir un segmento en media y extrema razón, que encierra la posibilidad de la construcción del pentágono regular. Se trata de dividir un segmento dado en dos partes de manera tal que el cuadrado construido sobre la parte mayor sea equivalente al rectángulo cuyos lados son el segmento dado y la parte menor. Una simple transformación de figuras permite reducir el problema a la determinación de un rectángulo conociendo su área y la diferencia entre sus lados, problema que traducido aritméticamente consiste en determinar dos números conociendo su producto y su diferencia, típico problema del álgebra de los babilonios.

En cuanto al conocimiento y construcción de los poliedros regulares parece natural que los pitagóricos se interesaran por estos cuerpos simétricos y "armoniosos"; interés que se trasmitió a Platón proporcionándole las bases materiales de su cosmogonía,

como lo revela la denominación de cuerpos platónicos que se ha dado a los poliedros regulares, aunque en un "escolio" del último libro de los *Elementos* de Euclides se agrega que estos "cuerpos" no se deben a Platón, pues tres de ellos: el cubo, el tetraedro y el dodecaedro se deben a los pitagóricos, mientras que el octaedro y el icosaedro se deben a Teeteto. De todas maneras los poliedros regulares, todos o no, constituyeron uno de los temas de la geometría pitagórica.

(3) El teorema de Pitágoras y la ecuación pitagórica. Después del desciframiento de las tablillas de los babilonios de este siglo, es sabido que los babilonios no sólo conocieron el "teorema de Pitágoras", que aplicaron en la resolución de problemas, sino que tuvieron también un conocimiento completo de los "tripletes pitagóricos", es decir, de la solución en números enteros de la llamada ecuación pitagórica: $x^2 + y^2 = z^2$. No obstante, puede aún mantenerse la opinión del historiador de la matemática Zeuthen, quien sostuvo que ese teorema constituyó el origen de la geometría racional en la escuela pitagórica y que las deducciones que paulatinamente fue realizando la escuela tuvieron por objeto lograr una demostración general del teorema, advertida su verdad en casos particulares.

En cuanto a la ecuación pitagórica se atribuye a la escuela la solución particular

$$x = \tfrac{1}{2}\ (n^2 - 1)\ ;\ y = n\ ;\ z = 1/2\ (n^2 + 1)\ ;$$

con n impar, solución que probablemente dedujeron de la propiedad conocida de ser todo número impar diferencia de dos cuadrados, de manera que si, a su vez, ese impar es un cuadrado, queda satisfecha la ecuación.

(4) El descubrimiento de los Irracionales. La demostración que trae Aristóteles en uno de sus escritos alude al descubrimiento de la irracionalidad del número que hoy expresamos como $\sqrt{2}$. En efecto, un caso particular del teorema de Pitágoras muy fácil de demostrar independientemente del caso general, comprobada que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles era el doble del cuadrado construido sobre

cualquiera de los dos catetos. Era claro que la hipotenusa no podía ser múltiplo del cateto, pues era mayor que él, pero menor que su doble, de ahí (que la razón entre la hipotenusa y el cateto debía ser un múltiplo m de la parte n^2 del cateto, siendo m y n números primos entre sí y, por tanto, no podían ser ambos, pares. Ahora bien, de la propiedad que hoy expresaríamos $m^2 = 2n^2$ es fácil deducir que m, por contener el factor 2, debe ser par, también lo ha de ser entonces su cuadrado y por contener este el factor *4,* n^2 ha de contener el factor 2 y, por tanto, también n, ha de ser par, luego n y m son ambos pares, contradicción que implicaba la inexistencia de m y n.

Los eleatas

El siglo V a. C. fue el gran siglo griego, el "siglo de Pericles", el siglo del auge de las artes plásticas y literarias, de la música y del teatro, el siglo en el cual la filosofía, superado el empirismo de los fisiólogos y el misticismo de los pitagóricos, se dirige hacia los problemas que han de constituir sus futuros temas de investigación: los problemas lógicos, la metafísica, la teoría del conocimiento, la ética; temas que en buena medida se vinculan con la matemática, primer esfuerzo científico concreto de los griegos.

La primera figura, cronológicamente, de la filosofía griega del siglo V es Parménides de Elea, que se habría formado en la escuela de esa colonia italiana: aunque una antigua leyenda asegura que Parménides fue instruido por un pitagórico.

Con Parménides se presenta un nuevo protagonista en el pensamiento reflexivo: es el juego de la razón con el proceso dialéctico del pensar, surgiendo como primer producto de ese proceso la distinción entre la apariencia y la esencia de las cosas. Según Parménides, frente a la realidad sensible que percibimos, cambiante y efímera, existe la realidad eterna, inmutable e inmóvil del ser. La ciencia ha de buscar esa realidad detrás de las apariencias del mundo de los sentidos y distinguir la verdad (el ser) de la opinión (el no ser). Sin duda que en su poema *Sobre la*

naturaleza, exento en tono profético y alegórico, Parménides no señala el camino para llegar a la verdad, pero no es menos indudable que con él se inicia la crítica del conocimiento y se introduce en la construcción científica un rigor lógico que busca y trata de encontrarlo en el poder racional del hombre, el carácter de permanencia que otorga al conocimiento su esencia, su objetividad, y en su discípulo Zenón de Elea puede advertirse con qué eficacia se esgrime ese poder mediante sus clásicos argumentos (1) en contra de la pluralidad y del movimiento, argumentos de tinte paradójico que se han interpretado como críticas dirigidas a las concepciones pitagóricas, al denunciar los absurdos que implicaba la concepción de los cuerpos como suma de puntos, del tiempo como suma de instantes, del movimiento como suma de pasajes de un lugar a otro.

Las críticas de Zenón no dejaron de tener influencia en el desarrollo ulterior de la matemática. Por lo pronto, introduce la continuidad, como una de las notas del ser, y elimina así la discontinuidad que había procurado a los pitagóricos "el escándalo de los irracionales". Por lo demás, la dicotomía del ser y no ser sienta las bases del principio lógico de “no contradicción" de perdurables consecuencias en el proceso discursivo, en especial en la matemática donde dará lugar a un recurso de demostración: el método de reducción al absurdo.

Notas complementarias

(1) Los argumentos de Zenón. La importancia matemática de los argumentos de Zenón no reside sólo en el concreto significado matemático que algunos de ellos poseen, sino en el hecho de que, al tomar como blanco de sus ataques la concepción pitagórica y en especial los conceptos matemáticos en ella implicados, ha contribuido a forjar la concepción racional de los entes geométricos fundamentales, tal como se presentará más adelante.

Así, en sus argumentos en contra de la pluralidad refuta la hipótesis de estar compuestas las magnitudes geométricas de

elementos indivisibles y extensos. En efecto, tal hipótesis conduce a un absurdo pues si algo está compuesto de elementos indivisibles, éstos no tienen extensión y un conjunto de elementos inextensos, por grande que sea su número, no puede dar sino una cantidad inextensa, es decir, nula. Por otra parte, las unidades que componen toda pluralidad deben estar separadas entre sí por algo, entre este algo y la unidad anterior debe haber a su vez otro algo (el vacío no existe), y así sucesivamente, de manera que un conjunto de infinitos elementos no puede dar sino una cantidad infinita. Luego toda pluralidad es nula e infinita al mismo tiempo.

También los cuatro argumentos en contra del movimiento: la dicotomía, el Aquiles, la flecha en el aire y el estadio, van dirigidos a combatir la tesis de los pitagóricos. Veamos el Aquiles, que es el argumento de contornos más dramáticos. Aquiles, "el de los pies ligeros", no alcanzará la lenta tortuga, por escasa que sea la distancia con la que la tortuga precede al corredor. Pues, cuando Aquiles ha recorrido esa distancia y llega donde estaba la tortuga, ésta estará en un lugar algo más adelante; cuando Aquiles llegue a ese lugar la tortuga habrá avanzado otro poco y así sucesivamente. De ahí que la conclusión es evidentemente absurda: de suponer finito el número de lugares, Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga, de suponerlo infinito, el lugar del encuentro existe, pero más allá de esos infinitos lugares.

Los dos argumentos anteriores, así como algún otro, aluden a la divisibilidad infinita de las cantidades y ponen por tanto en evidencia el peligro que entrañaba el manejo poco cuidadoso de un concepto tan vago y riesgoso como el infinito, de ahí que sea probable que otra de las consecuencias indirectas de las críticas de Zenón fuera esa característica de los matemáticos griegos posteriores de tratar de eliminar o de reprimir el infinito de su ciencia.

La matemática del siglo V

En el siglo V a. C. la matemática aún no se había sistematizado. No obstante, la labor de los pitagóricos había dejado dos saldos

importantes, uno de carácter general: la exigencia de la demostración, y otro de carácter circunstancial: la consagración casi exclusiva de los matemáticos a las investigaciones geométricas.

De ahí que los matemáticos del siglo V se dedicaron a la búsqueda de nuevas propiedades de las figuras, ya de carácter general; nuestros teoremas, ya de carácter particular; nuestras construcciones, que deben considerarse como "teoremas de existencia" pues para los antiguos construir una figura, partiendo de elementos dados y con propiedades prefijadas, era demostrar que tal figura existe o, lo que es lo mismo, deducir su existencia de propiedades conocidas.

Como las primeras figuras de las que partieron los griegos fueron la recta y la circunferencia, todas las proposiciones geométricas fueran teoremas o construcciones, debían fundarse sobre esas dos figuras y sus relaciones y conexiones mutuas.

Por su parte, y ésta es otra de las características de la matemática del siglo, muchas de esas nuevas propiedades fueron logradas mediante la búsqueda y la persecución de algunos problemas particulares que, a manera de polos atrajeron la atención de los matemáticos. Esos problemas, hoy llamados "los problemas clásicos de la geometría", fueron tres: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.

La división de un ángulo cualquiera en tres partes iguales mediante construcciones con rectas y circunferencias o, como suele también decirse, con regla y compás, es un problema que ha de haber nacido naturalmente y si llamó la atención fue seguramente por la desconcertante discrepancia entre la sencillez de sus términos y la imposibilidad de resolverlo con regla y compás; imposibilidad tanto más llamativa cuanto con esos medios podía dividirse un ángulo cualquiera en 2, 4, 8, ... partes, mientras que podían trisectarse ángulos especiales, como el recto y sus múltiplos. Es posible, además, que la construcción de los polígonos regulares contribuyera a aumentar el interés por el problema, pues así como la bisección de un ángulo permitía construir un polígono de doble número de lados de otro dado, la trisección hubiera permitido la de un polígono de triple número de lados.

Sin embargo, todos los intentos de los matemáticos griegos para resolver el problema, en general, resultaron infructuosos cuando se

pretendía utilizar las propiedades de una geometría fundada exclusivamente en las rectas y circunferencias y sus intersecciones, mientras que la cosa resultaba factible cuando a esa geometría se agregaban nuevas líneas o se admitían nuevas posibilidades entre las líneas conocidas. (1)

El problema de la duplicación del cubo: determinar geométricamente el lado de un cubo de volumen doble del de un cubo de lado dado, ofrece otro cariz. Por lo pronto, varias leyendas le atribuyen un origen extra-matemático. Una de ellas refiere que consultado el oráculo de Delfos a fin de aplacar una peste, habría aconsejado duplicar el ara de Apolo que era cúbica, de ahí el nombre de "problema de Delos" con que a veces se lo designa. Pero es posible que también en este caso su origen fuera geométrico, como natural generalización del problema de la duplicación del cuadrado, de fácil solución, sin más que tomar la diagonal como lado del cuadrado doble. Pero al trasladar el problema del plano al espacio, todos los intentos de resolver el problema con los medios ordinarios de la geometría resultaron vanos.

En cuanto al problema de ***la cuadratura del círculo***, surgió sin duda de la exigencia práctica de determinar el área de un círculo conociendo su radio o su diámetro, y traduciéndose geométricamente en un problema de equivalencia: dado un segmento como radio de un círculo, determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente.

Los pitagóricos habían resuelto el problema de la "cuadratura de los polígonos", pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable y, al igual que en los otros dos problemas clásicos, los intentos de "cuadrar el círculo", sin acudir a recursos especiales, resultaron infructuosos.

Son interesantes los intentos que en este sentido realizaron los sofistas Antifón y Brisón. El primero parte de la propiedad: es siempre posible, dado un polígono inscrito en un círculo, construir otro de doble número de lados, agregando que si el número de lados aumenta, el polígono se aproxima cada vez más al círculo; llegando a la conclusión de que, al ser todos los polígonos cuadrables, lo será en definitiva también el círculo, conclusión final falsa, pues, como ya observó Aristóteles, por grande que sea el número de lados, el polígono jamás llenará el círculo. Brisón, por su

parte, agregó a estas consideraciones las análogas referentes a los polígonos circunscritos, mostrando cómo las dos series de polígonos estrechan cada vez más al círculo, cuya área estará siempre comprendida entre la de dos polígonos: uno inscrito y otro circunscrito. Si Brisón llegó hasta aquí, aún sin resolver el problema, habría señalado la senda por la cual más tarde Arquímedes logrará notables resultados, pero si, como se dice, agregó que el área del círculo es media proporcional entre la de los cuadrados inscrito y circunscrito, habría entonces cometido un error bastante grosero, aproximadamente del 10 %.

Con los problemas de Delos y de la cuadratura del círculo se vincula la figura de Hipócrates de Quíos, el primer matemático "profesional", quien habiendo llegado a Atenas en la primera mitad del siglo por razones nada científicas, se interesó por la matemática y, siguiendo una probable tradición de mercader, enseñó esa ciencia por dinero a la manera de los sofistas.

Las contribuciones de Hipócrates son importantes; en el problema de la duplicación del cubo redujo la cuestión a un problema de geometría plana que, generalizado, tomó el nombre de "problema del mesolabio", (2) mientras que, sin lograr cuadrar el círculo, logró cuadrar recintos limitados por arcos de círculos, aparentemente más complicados que el círculo, que por su forma de luna creciente se los llamó "lúnulas de Hipócrates". (3)

Agreguemos que algunas curvas o recursos especiales que permitían resolver uno de los problemas clásicos también a veces resolvía otro de ellos, hecho que revelaba alguna relación entre esos problemas que permaneció siempre oculta a los matemáticos griegos. Un caso interesante lo ofrece una curva inventada por el sofista Hipias, que permitía resolver la trisección o, mejor, la multisección del ángulo y que más tarde se comprobó que permitía resolver también el problema de la cuadratura del círculo, razón por la cual se la conoció desde entonces como la "cuadratriz de Hipias”. (4)

Por último, mencionemos a otro matemático del siglo V, el maestro de Platón: Teodoro de Cirene, a quien se atribuye la demostración de la inconmensurabilidad de una serie de segmentos, cuyas medidas son las raíces cuadradas de los primeros números no cuadrados hasta el 17 inclusive.

Notas complementarias

(1) Una trisección por "inserción", Los griegos denominaban "inserción" a una relación entre figuras que consistía en admitir que dadas dos transversales en general, y un punto fijos, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo y tal que sus intersecciones con las transversales determinan un segmento de longitud prefijada. Con la inserción, postulada como una construcción posible más, el campo de la resolubilidad de los problemas geométricos se amplía (la inserción presupone la resolución de una ecuación de cuarto grado) si las transversales son rectas.

Por ejemplo, añadida la inserción, la trisección del ángulo es posible con regla y compás, Sea AVB el ángulo a trisecar. Por un punto M de AV se trazan MP y MQ perpendicular y paralela respectivamente a VB; la recta VC que por inserción determina entre MP y MQ un segmento RS doble del VM, biseca el ángulo dado, pues el ángulo CVB es mitad del AVC. Basta para comprobarlo unir el punto medio O de RS con M y considerar los ángulos de los triángulos isósceles MOS y VOM.

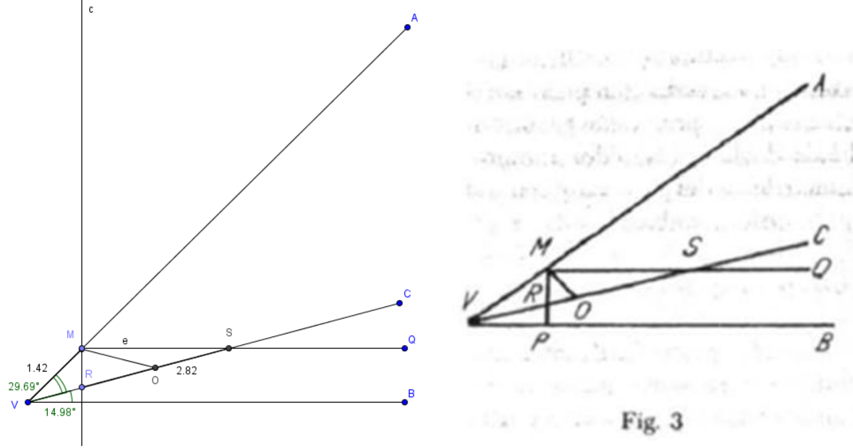


Fig. 3

(2) El problema del mesolabio. La historia de este problema aparece brevemente expuesta en una carta que Eratóstenes (s. III a. C.) envió a Ptolomeo III con una solución propia y un instrumento

con el cual se llevaba a cabo prácticamente esa solución. La primera parte de esa carta expresa: "Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos" hiciese aparecer en escena al rey Minos en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco, y advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien pies, exclamó: "Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real, duplicadlo, Conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato a cada uno de sus lados". Es evidente que en esto se engañaba, puesto que duplicando los lados de una figura plana, ésta se cuadruplica mientras que si es sólida se octuplica. Se agitó entonces entre los geómetras la cuestión de cómo podía duplicarse una figura sólida cualquiera, manteniendo su especie. Y este problema se llamó de la duplicación del cubo. Después de muchos titubeos, fue Hipócrates de Quíos el primero que encontró que si entre dos rectas una doble de la otra se insertan dos medias proporcionales se duplicará el cubo, con lo que convirtió una dificultad en otra no menor. En efecto, aun reducido a un problema de geometría plana, no pudo resolverse por medio de recursos elementales. Mas, es posible que más adelante esa reducción no agradara a P1atón, que criticaba a los geómetras griegos por su escasa dedicación a la geometría del espacio.

El razonamiento que condujo a Hipócrates a esa reducción pudo ser el siguiente: si los volúmenes de cuatro cubos están en progresión geométrica de razón 2, el cuarto cubo tiene el lado doble del lado del primero, mientras que el segundo cubo es de volumen doble del primero; y como al estar una serie de cubos en progresión geométrica, también lo están en sus lados, resulta en definitiva que si se intercalan dos medias proporcionales entre dos segmentos, uno doble del otro, la primera de esas medias resolvía el problema de Delos. Más tarde se eliminó tal limitación y con el nombre de "problema del mesolabio" se conoció el problema de intercalar dos segmentos medios proporcionales entre dos segmentos dados; es decir, dados a y b, determinar geométricamente dos segmentos x e y tales que $a : x : : x : y : : y : b$ de donde $x^3 = a^2b$; $y^3 = ab^2$. Cuando $b = 2a$, $x^3 = 2a^3$, se cae en el problema de Delos.

(3) Las lúnulas de Hipócrates. La contribución de Hipócrates al problema de la cuadratura del círculo es más importante, no sólo porque la cuadratura de las lúnulas es un aporte positivo, sino también por el cúmulo de propiedades geométricas que tal aporte entrañaba que, por lo demás, proporciona una medida de los conocimientos de la época.

En la cuadratura de las lúnulas, Hipócrates utiliza la proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados de sus diámetros, que probablemente admitió intuitivamente como extensión de la propiedad, sin duda conocida, de la proporcionalidad entre polígonos semejantes y los cuadrados de los lados homólogos. En efecto, la demostración rigurosa, por parte de los griegos, de aquella propiedad exigió la introducción de un nuevo método, el de exhaución, que no aparecerá hasta el siglo siguiente.

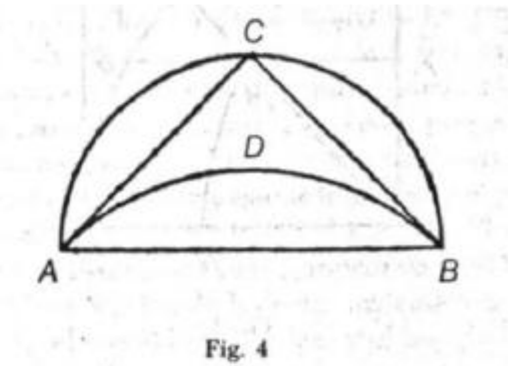


Fig. 4

Ya dijimos que el fragmento relativo a las lúnulas es el fragmento matemático más antiguo que se conoce, de ahí que probablemente estemos en condiciones de conocer el proceso que originariamente siguió Hipócrates en su investigación. Resumiendo el fragmento, digamos que Hipócrates logra cuadrar tres lúnulas, la más simple de las cuales se obtiene considerando en el semicírculo *ACBA* los segmentos circulares semejantes S y s de cuerdas *AB* y *AC*.

Si indicamos con L la lúnula *ACBDA* y con T el triángulo *ABC* se comprueba que $L + S = T + 2s$, pero, en virtud de la proporcionalidad aludida, $S = 2s$, de donde $L = T$: la lúnula es equivalente al triángulo y, por tanto, al cuadrado de lado ½ *AB*.

Mientras que en esta primera lúnula la razón de los cuadrados de las cuerdas homólogas es 2, en las otras dos lúnulas de

Hipócrates, algo más complicadas, esa razón es $^3/_2$ y 3. (Modernamente se ha comprobado que existen otras dos lúnulas cuadrables en las cuales esa razón es $^5/_3$ y 5.)

(4) La cuadratriz de Hipias. Esta curva que fue la primera definida cinemáticamente, puede, por esa misma definición, construirse por puntos. Sea un segmento AB que gira alrededor de A con un movimiento uniforme de rotación, mientras que al mismo tiempo el segmento igual BC se traslada paralelamente a sí mismo con un movimiento uniforme de traslación de manera que ambos segmentos coinciden en AD. La intersección en cada instante de las posiciones AE y FG de los dos segmentos móviles, determinan un punto M de la cuadratriz BMN (los griegos no consideraron sino la parte de la curva comprendida en el cuadrante BAD).

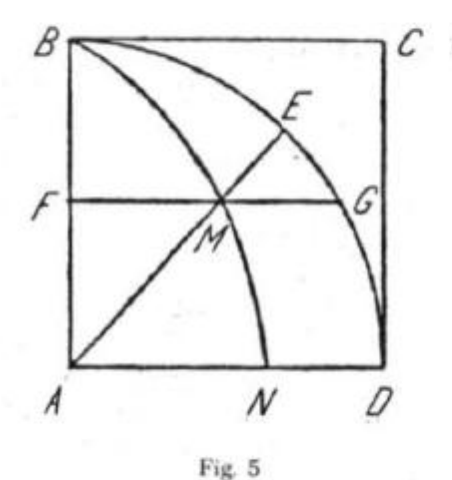


Fig. 5

Como el ángulo BAE es proporcional al segmento BF, es fácil comprender cómo esta curva permite dividir un ángulo en un número cualquiera de partes iguales, sin más que dividir el segmento proporcional en ese número de partes; y es así cómo Hipias resolvió con esta curva el problema de la trisección del ángulo.

Sin embargo, esta curva ha llegado a nosotros con el nombre de "cuadratriz de Hipias" porque resuelve el problema de la cuadratura del círculo. Aunque esto no se advirtió sino un par de siglos después que Hipias imaginara la curva, puede tener interés

desde ya exponer la justificación del nombre. La clave está en el punto N donde la curva corta a AD, y que no puede obtenerse como los demás puntos de la curva, pues en esta posición final ambos segmentos móviles coinciden y, por tanto, no tienen punto de intersección. Pero en el siglo V el matemático Dinostrato por el método de exhaución demostró que el segmento AB es medio proporcional entre AN y la longitud del arco de cuadrante BED, de manera que mediante este segmento AN era posible rectificar la circunferencia a. El último paso lo dará Arquímedes al demostrar cómo se podía pasar, con regla y compás, de la circunferencia rectificada a la cuadratura del círculo de manera que desde entonces quedó justificado el nombre de la curva inventada dos siglos antes por Hipias.

La Academia y el Liceo

En el siglo IV a. C. las dos escuelas filosóficas más importantes de Atenas: la Academia fundada por Platón en 387 a. C., y el Liceo de Aristóteles que éste funda en 335, ejercerán en distinta medida su influencia en el desarrollo de la matemática del siglo.

La influencia de Platón y de la Academia fue singularmente notable. Esa influencia, favorecida por la índole especial de la teoría de las ideas y la teoría del conocimiento de Platón, se ejerció ya por el papel asignado a la matemática en la propia concepción filosófica y en la construcción del mundo, ya por las contribuciones técnicas aportadas por Platón o que se le atribuyen y por los matemáticos del círculo platónico o vinculados con él.

El valor de la matemática como propedéutica en la formación del filósofo y la concepción de los entes matemáticos como intermediarios entre el mundo de las ideas y el mundo de las cosas, justificarían la clásica frase que Platón habría estampado en el pórtico de la Academia, impidiendo su ingreso a los ignorantes en geometría.

Por su parte, en el *Timeo*. Platón, influido por el pitagorismo, mostrará el papel que asigna a la matemática en la construcción del

mundo, en la que el *Demiurgo* hace intervenir de manera especial los antiguos cuatro elementos: fuego, aire, agua, tierra, vinculados a su vez con los poliedros regulares, al hacerlos corresponder, respectivamente, con el tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo. Como, con excepción del cubo, las caras de los otros tres poliedros son triángulos equiláteros y, por tanto, semejantes, los elementos respectivos: fuego, aire, agua, podrán transformarse entre sí, no así en tierra, pues las caras del cubo son cuadrados que no pueden descomponerse en triángulos equiláteros sino en triángulos rectángulos isósceles. Estos triángulos y la mitad de los equiláteros son triángulos rectángulos, de ahí que sean estos triángulos las figuras fundamentales con las que el *Demiurgo* construyó el mundo, según la fantasía del *Timeo*. Quedaba, sin embargo, un quinto poliedro regular: el dodecaedro, de caras pentagonales no descomponibles en los triángulos anteriores. En el *Timeo* se alude fugazmente a este poliedro diciendo que el *Demiurgo* lo utilizó para decorar el universo, aunque en un diálogo (apócrifo) se hace corresponder el dodecaedro a un quinto elemento: el éter, que luego será la "quintaesencia" de Aristóteles.

Es natural que Platón estimulara en la Academia el estudio de la matemática, de ahí que puedan señalarse contribuciones matemáticas surgidas del seno de la institución, cuando no de Platón mismo.

Así se atribuye a Teeteto de Atenas, inmortalizado en el diálogo de ese nombre, el estudio de los inconmensurables, con lo cual habría sentado las bases de las propiedades que más tarde se reunirán en el Libro X de los *Elementos* de Euclides.

En cuanto a las contribuciones de Platón, algunas son, sin duda, apócrifas, como la atribución de un método y de un dispositivo mecánico respectivo, para resolver el problema de la duplicación del cubo en vista de las concepciones platónicas opuestas a toda manipulación. Quizá sea también dudosa la solución que se le atribuye de los "tripletes pitagóricos", muy semejante, por lo demás, a la que se atribuye a los pitagóricos (la solución de Platón sería $x = 1/2\ m^2 - 1$; $y = m$; $z = 1/2\ m^2 + 1$ para m par). En cambio, se le ha atribuido con mayor verosimilitud, una contribución metodológica: la distinción entre "método analítico" y "método sintético" en las demostraciones de los teoremas y contribuciones

geométricas, distinción que los matemáticos griegos utilizaron en sus investigaciones. (1)

En cambio, ni Aristóteles ni su escuela parecen haberse ocupado especialmente de matemática. Además de las frecuentes referencias a la matemática que aparecen en las obras de Aristóteles, se le debe un par de contribuciones indirectas. Por un lado, con su sistematización de la lógica, Aristóteles fijó las bases sobre las cuales se ordena y se erige una ciencia deductiva tal cual es la matemática; por el otro, fue Aristóteles quien encomendó a su discípulo Eudemo de Rodas la redacción de "historias" de la matemática, de la geometría y de la astronomía, habiéndose conservado como dijimos, un fragmento de la historia de la geometría.

Notas complementarias

(1) El método analítico. La distinción entre los métodos analítico y sintético explica un hecho que llama la atención cuando se examinan las proporciones, en especial las construcciones, de los tratados geométricos griegos. En efecto, se advierte en esos tratados que para demostrar un teorema o construir una figura se parte, a veces, de propiedades totalmente alejadas del tema en cuestión, para luego, en ocasiones por caminos algo misteriosos, llegar a la demostración o construcción deseadas.

Parece natural pensar que no pudo haber sido ése el camino por el cual se descubrió la propiedad, y que en verdad lo que se nos muestra es el edificio libre de todo el andamiaje que sirvió para elevarlo. Así fue, en general, como se deduce de la distinción entre los métodos analítico y sintético.

El método analítico, que es también el método heurístico y actualmente empleado en la enseñanza, consiste en suponer cierto el teorema a demostrar o resuelto el problema a construir, y mediante verdades ya demostradas deducir un teorema o un problema conocidos, de manera que si el proceso puede invertirse, el teorema queda demostrado y el problema resuelto. Este proceso

inverso es el método sintético que consiste en partir de una verdad conocida para deducir, por pasos sucesivos, la verdad a probar. Es este método sintético, deductivo por excelencia, el que utilizaron con preferencia los griegos después de haber obtenido por el método analítico, que silencian el resultado buscado.

Veamos, por ejemplo, la construcción de un triángulo isósceles cuyos ángulos en la base sean dobles del ángulo en el vértice, problema importante en la construcción del pentágono regular. Supongamos el problema resuelto, según las normas del método analítico, y sea *ABC* de vértice *A* el triángulo buscado. Si se traza la bisectriz interior del ángulo *B*, que cortará al lado opuesto en *D*, es fácil comprobar, por igualdad de ángulos, que $AD = DB = BC$, y que el triángulo isósceles *DBC* es semejante al triángulo *ABC.* Se deduce en consecuencia $AB : BC = BC : OC = AD : DC$ y por una propiedad de las proporciones $(AB + BC): AB = (AD + DC) : AD =AB : BC$ y por tanto $AB^2 = (AB + BC) BC$, es decir, que en el segmento suma de los lados desiguales del triángulo *ABC; AB* y *BC*, el punto de separación *B* lo divide en media y extrema razón: "análisis" que explica por qué Euclides, en sus *Elementos*, para construir el pentágono comienza por dividir un segmento en media y extrema razón, sin justificación aparente alguna de la vinculación entre ambas construcciones, y es evidente que sin la aplicación del método analítico hubiera sido difícil prever tal vinculación.

La matemática del siglo IV

La matemática griega de la primera mitad del siglo IV ofrece el espectáculo de una aritmética estancada y de un cúmulo de propiedades geométricas aun no sistematizadas, obtenidas en gran parte mediante la búsqueda de la solución de problemas particulares, como los "problemas clásicos" y otros. Quedaban, en efecto, aún en pie dos obstáculos importantes: el de las cantidades inconmensurables que en número cada vez mayor aparecían invadiendo la geometría, y un grupo de problemas de equivalencia, entre ellos, la cuadratura del círculo, y la cubatura de la pirámide y

de la esfera, para los que no se habían dado aún demostraciones rigurosas que facilitaran su solución.

Entre los matemáticos de la primera mitad del siglo cabe mencionar a una figura que, sin pertenecer a la Academia, estaba vinculada con Platón por lazos de amistad: Arquitas de Taras (Tarento), estadista y científico que se ocupó de mecánica teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría, dejando en este campo una ingeniosa solución del problema del mesolabio, mediante la intersección de tres superficies: un cilindro, un cono y una superficie tórica, es decir, la superficie engendrada por un circunferencia que gira alrededor de una recta de su plano, que no sea un diámetro, y que en este caso particular es una tangente. (1)

También es probablemente de esta época un Timaridas de Paros, matemático enigmático hasta hace poco, pues se le atribuye la resolución de un problema algebraico, que implica un sistema de ecuaciones lineales, pero que actualmente se lo vincula con los babilonios y su matemática. Ese problema que se resuelve con una regla que más tarde se llamó “superfloraciones (*epantema*) de Timaridas", consiste en determinar un número, conociendo sus sumas, con cada uno de n números desconocidos y con la suma de todos ellos.

Pero el más grande de los matemáticos del siglo y uno de los más grandes matemáticos griegos es Eudoxo de Cnido, médico, matemático y astrónomo que estuvo en Atenas frecuentando la Academia como discípulo de Platón, viajó luego a Egipto donde residió un año y medio, regresando luego a Atenas muriendo relativamente joven en su ciudad natal.

Como astrónomo se debe a Eudoxo la primera explicación científica del sistema planetario, mientras que reveló su talento matemático al cortar el nudo gordiano que impedía el progreso de la geometría, pues resolvió al mismo tiempo las dos máximas dificultades que entonces se oponían a ese progreso: los irracionales y las equivalencias. Eudoxo los resolvió mediante un proceso único que comporta un principio, una definición y un método (2) y que aun en forma oculta, abarcaba las nociones de índole infinitesimal que precisamente significaban los elementos indispensables para resolver aquellos problemas.

Por su parte el acontecimiento matemático más notable de la segunda mitad del siglo es la aparición de unas curvas nuevas; nuestras cónicas, cuyo estudio adquirirá un gran desarrollo en manos de Arquímedes y de Apolonio.

Se ha atribuido ese descubrimiento a Menecmo, hermano del matemático Dinostrato que mencionamos con motivo de la cuadratriz de Hipias, aunque se ha conjeturado (Neugebauer) que ese descubrimiento se debió al empleo de los relojes de sol, ya que la sombra del extremo de la barra vertical que servía de reloj (el gnomon) dibuja arcos de cónicas en el suelo durante la marcha del sol. Sea lo que fuere, su nombre actual, abreviatura de "secciones cónicas" alude a su origen, pues se obtienen como intersecciones de las generatrices de un cono circular recto con un plano que no pase por el vértice del cono. Esas curvas son distintas según la posición del plano secante, pero en los comienzos tal distinción se vio en la naturaleza del ángulo formado en el vértice del cono, por dos generatrices coplanares con el eje del cono, manteniendo siempre el plano secante normal a una generatriz. Según fuera agudo, recto u obtuso aquel ángulo, se obtenían tres curvas distintas que a veces se designaron como "tríada de Menecmo".

Notas Complementarias

(1) La solución de Arquitas. En síntesis la construcción de Arquitas que en realidad opera con propiedades de geometría plana, puede resumirse así: Sea en el plano base una circunferencia de diámetro $AB = b$, y por A una recta tal que determine sobre la circunferencia una cuerda $AC = a$. Imaginemos ahora las tres superficies siguientes:

a) el cilindro circular recto de base la circunferencia de diámetro b (de ecuación en coordenadas polares $R \cos \varphi = b \cos \alpha$);
b) el cono circular recto engendrado por la rotación de la generatriz AC alrededor de AB (de ecuación $a = b \cos \varphi \cdot \cos \alpha$);
c) la superficie engendrada por una semicircunferencia de diámetro AB situada en el plano perpendicular al plano de la

base, que gira alrededor de su tangente en A (de ecuación $R \cos^2 \varphi = a$).

Sea ahora M el punto de intersección de las tres superficies. Ese punto pertenecerá a la semicircunferencia móvil de diámetro $AB' = b$, a la generatriz MN del cilindro siendo N un punto de AB', y a la generatriz AM del cono que contiene el punto C' tal que $AC' = a$. Se demuestra fácilmente que el ángulo $AC'N$ es recto, por tanto, de los triángulos rectángulos $AC'N$; AMN; AMB' se deduce la proporcionalidad $AC' : AN = AN : NM = NM : AB'$ que demuestra que los segmentos AN y AM resuelven el problema del mesolabio. (Analíticamente, si de las tres ecuaciones se elimina α y se introduce $r = \cos \varphi$, se obtiene igualmente $\cos \varphi = a : r = r : R = R : b$).

(2) La obra matemática de Eudoxo. La posibilidad de llegar a una definición de la razón entre dos cantidades, sean éstas conmensurables o no, la fija Eudoxo partiendo ante todo de un recurso de tipo lógico, enunciando un "principio" que expresa la condición para que dos cantidades "tengan razón mutua". Este principio afirma que "dos cantidades tienen razón mutua cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor", o en términos actuales; dadas dos cantidades $A > B$, existe siempre un entero n tal que $B > A$ o también que $\frac{1}{2} A < B$. Euclides en sus *Elementos* otorgó a este enunciado el mismo carácter lógico de "principio", pero Arquímedes de olfato matemático más fino, verá en él un postulado y en sus escritos así lo considera. Hoy mantiene tal carácter, confirmado brillantemente por las geometrías no arquimedianas de este siglo, y se le conoce ya como "postulado de la continuidad", ya como "postulado de Arquímedes" y a veces "de Eudoxo o Arquímedes".

La segunda etapa del proceso de Eudoxo es la definición de razón entre dos cantidades, sean conmensurables o no. Es la siguiente "definición por abstracción": Dos razones $a : b$, $c : d$ son iguales si dados dos números enteros cualesquiera m y n y ma (mayor, menor o igual) nb, se verifica respectivamente mc (mayor, menor o igual) nd. Con esta definición que tiene cierto aire de familia con la actual definición de los números reales mediante la teoría de las cortaduras de Dedekind, Eudoxo logra conceder carta

de ciudadanía geométrica a las cantidades inconmensurables, con lo que acentúa el proceso iniciado por los pitagóricos de sacrificar, en aras de la geometría, la aritmética y el álgebra, cuyas nociones seguirán presentándose en la matemática griega bajo ropaje geométrico.

En conexión con el postulado anterior Eudoxo introduce un método de demostración que una discutible traducción renacentista bautizó como "método de exhaución", nombre con que se le conoce y que sustituye en la matemática griega la noción de límite del actual análisis infinitesimal. Ese método consiste en una doble reducción al absurdo y según él, para demostrar que una cantidad A es igual a una cantidad B o que una figura A es equivalente a una figura B, basta probar que A no puede ser ni mayor ni menor que B.

Una de las primeras demostraciones que habría logrado Eudoxo es la proporcionalidad entre dos círculos C y C' y los cuadrados D y D' construidos sobre sus diámetros, es decir, $C : C' = D : D'$. Para ello supone que X sea el cuarto proporcional entre C, D y D' y admite $X < C'$. Inscribe un C' polígono P' tal que en virtud del "principio", resulte $C' - P' < C' - X$ o, lo que es lo mismo, $P' < X$. Si P es el polígono semejante inscrito en C, en virtud de la proporcionalidad conocida entre los polígonos semejantes y los cuadrados de los lados homólogos $C : X = D;\ D' - P':\ P'$ y por tanto $P > C$, evidentemente absurdo pues P es un polígono inscripto en C. Como consecuencia de este teorema, o siguiendo un camino semejante, se llega también a un absurdo si se parte de $X > C'$, por tanto $X = C'$ y el teorema queda probado.

También por este método habría demostrado Eudoxo la equivalencia entre prismas y pirámides según referencias de Arquímedes, quien a este respecto agrega la siguiente observación de interés histórico: "... no debe dejar de atribuirse un mérito no pequeño a Demócrito que fue el primero que dio esas proposiciones sin las demostraciones".

Cabe señalar que el método de exhaución no es un método de descubrimiento como el método analítico, pues el resultado al que debe llegarse se da por admitido; ni es un método constructivo como el método sintético, en el que partiendo de propiedades conocidas se llega por vía deductiva a nuevas verdades. El método

de exhaución es puramente un método de demostración que no pretende descubrir una nueva verdad, sino demostrarla, circunstancia que pone de relieve una característica de la matemática griega. A diferencia de matemáticos de otras épocas, los matemáticos griegos pusieron el acento en la demostración y no en el resultado, en el camino y no en la meta. Y esa demostración no podía ser cualquiera, sino rigurosamente deductiva a partir de los postulados y propiedades ya demostradas, pues cualquier otro camino, por evidente o convincente que fuera, "no comporta una verdadera demostración", como dirá alguna vez Arquímedes.

(3) Las triadas de Menecmo. Sea un cono circular recto de vértice V, por un punto de una generatriz un plano perpendicular a la misma y por V un plano paralelo al anterior. Si el ángulo en el vértice del cono es agudo, el plano paralelo no contendrá ninguna generatriz y el plano secante cortará a todas las generatrices (alargadas si es necesario); la sección cónica será una curva cerrada que se bautizó entonces, según se dice, por el matemático Aristeo, contemporáneo de Euclides aunque más joven, como sección del cono acutángulo (es nuestra elipse). Si el ángulo en el vértice es recto, el plano paralelo contendrá la generatriz paralela al plano secante, y en este caso la sección cónica será una curva abierta que se extiende indefinidamente: es la sección del cono rectángulo (nuestra parábola). Si el ángulo en el vértice es obtuso el plano paralelo contendrá dos generatrices paralelas al plano secante de manera que ahora éste sólo cortará a las generatrices de un lado de aquel plano, mientras que no cortará a las generatrices de ese plano y las que estén más allá, aunque más tarde se advirtió que cortaría también a estas generatrices si se las prolongaba más allá del vértice.

La sección cónica en este caso es también una rama abierta, pero que se mantiene dentro de un ángulo a cuyos lados, nuestras asíntotas, se acerca indefinidamente. Esta sección es entonces la sección del cono obtusángulo (una rama de nuestra hipérbola). Cuando el ángulo que contiene esa rama es recto (nuestra hipérbola equilátera) la curva adquiere propiedades especiales.

Desde el comienzo esas curvas pusieron de manifiesto sus elementos de simetría (centro, ejes, vértices) y sus propiedades

más elementales, así la parábola permitía transformar en cuadrado equivalente los rectángulos de un lado fijo, la hipérbola equilátera permitía obtener todos los rectángulos equivalentes, propiedades que según referencias posteriores, habrían permitido a Menecmo dar dos soluciones distintas del problema del mesolabio con esas curvas. En efecto, de la proporcionalidad $a : x :: x : y :: y : b$ se obtiene $x^2 = ay$; $y^2 = bx$; $xy = ab$, de ahí que los dos medios proporcionales x e y podían obtenerse o bien mediante la intersección de dos parábolas de vértice común y ejes perpendiculares entre sí o bien mediante la intersección de una de esas parábolas con la hipérbola equilátera de centro aquel vértice y de asíntota aquellos ejes.

LA MATEMÁTICA HELENÍSTICA

Alejandría

Al iniciarse el siglo III a. C. las condiciones políticas y culturales del mundo mediterráneo han cambiado radicalmente. En la península italiana un pequeño pueblo se había convertido en la mayor potencia de Italia e iniciaba una expansión que lo convertiría en un gran imperio, mientras que en el mundo griego las expediciones, conquistas y muerte de Alejandro habían modificado por completo su fisonomía.

Si bien el incipiente imperio que fundó Alejandro desapareció con él, la idea de imperio universal que encarnó y que había intentado realizar arraigó en el campo de la cultura; y la cultura griega, a favor del rápido derrumbe del imperio persa se extendió helenizando todo el Oriente.

Por otra parte, las campañas de Alejandro, a la par que ampliaron el horizonte geográfico de los griegos, dilataron sus conocimientos. Un intercambio fecundo se establece entre Oriente y Occidente y los centros intelectuales se extienden y desplazan. Atenas, perdida su importancia política, pierde ahora su supremacía cultural, y en el mundo griego de Oriente surgen nuevos focos de irradiación de la cultura griega, entre los cuales sobresale Alejandría, fundada en 332 y pronto convertida en el gran emporio del comercio mediterráneo.

El idioma griego, al universalizarse, contribuyó al intercambio y a la difusión de la cultura, sirviendo de vehículo a todos los intelectuales del mundo helenizado y favoreciendo el progreso de la ciencia a la sazón en una etapa de franca especialización y ramificación. Además, los príncipes helenísticos dispensaron una amplia protección a las ciencias que permitió no sólo ofrecer a los científicos las condiciones de seguridad y bienestar que facilitaran su dedicación exclusiva a la investigación y a la enseñanza, sino que permitió la adquisición de los materiales e instrumental, a veces costosos necesarios para los estudios científicos. Modelo de esta

corte de mecenas fue la de los Ptolomeos de Egipto, que convirtieron el gran puerto comercial de Alejandría en el centro científico más importante del mundo griego y también el más duradero.

En Alejandría es donde nacen y se desarrollan las dos grandes instituciones científicas que caracterizaron el período alejandrino: el Museo y la Biblioteca.

Aunque los datos de que se disponen acerca de la organización del Museo son escasos, puede decirse que en esa institución residían a expensas del rey y dependientes de él, científicos provenientes de todas partes, con la única obligación de dedicarse a tareas de investigación o docentes en las que colaboraban estudiosos y estudiantes provenientes también de todos los rincones del mundo helenizado. Contaba para ello con el material científico y el instrumental necesario: instrumentos astronómicos y un local que podría calificarse de observatorio; locales para la investigación fisiológicas y salas de disecciones; quizás contara a su alrededor con un jardín botánico y un parque zoológico. Sus actividades se desarrollaron alrededor de cuatros secciones o departamentos principales: matemática, astronomía, medicina, letras y, por supuesto, la Biblioteca, ésta más adelante se convirtió en una institución en cierto modo independiente.

Así como el Museo resultó el centro de las investigaciones del campo de las ciencias exactas y naturales, la Biblioteca de Alejandrina lo fue de las humanidades, en especial de la filología y la gramática y, su dirección, en especial en el período inicial, fue confiada a verdaderos sabios.

Con este ambiente científico de Alejandría se vinculan, directa o indirectamente, las tres figuras máximas de la matemática griega, los "tres grandes": Euclides, Arquímedes y Apolonio, cuyo brillo justifica por sí sólo que se considere la época alejandrina como "edad de oro de la matemática griega".

Euclides y sus Elementos

Muy poco se sabe de Euclides, fuera de las noticias que menciona Proclo en su resumen histórico ya citado, (1) según el cual Euclides fue un sabio que floreció hacia el 300 a. C., autor de numerosas obras científicas, entre ellas sus célebres *Elementos de geometría*, cuya importancia científica se mantuvo indiscutida hasta el advenimiento de las geometrías no euclidianas en la primera mitad del siglo pasado y cuyo valor didáctico se mantuvo hasta comienzos de este siglo, cuando aún algunas escuelas utilizaban los *Elementos* como texto escolar. Por lo demás, Euclides y sus *Elementos* fueron siempre considerados como sinónimo de Geometría.

Los Elementos no contienen toda la geometría griega de la época, ni constituyen un resumen de toda ella; sin duda contiene una buena parte de la matemática elaborada por los matemáticos griegos anteriores a Euclides y por Euclides mismo, pero esa parte no fue tomada al azar, sino seleccionada de acuerdo con un criterio prefijado que convirtió a ese conjunto de conocimientos en un sistema estructurado según un método.

Ese sistema y este método resultaron tan fecundos que no sólo la obra de Euclides eclipsó otros *Elementos* redactados anteriormente sino que no se poseen datos de obras análogas posteriores a la de Euclides.

Varios factores favorecieron la labor de Euclides. En primer lugar la posibilidad de disponer del tiempo y de los elementos necesarios para su labor científica, mediante el régimen "full-time" implantado en el Museo. Por otra parte, Euclides tuvo a su disposición una gran cantidad de propiedades matemáticas acumuladas en especial por obra de los pitagóricos, de Arquitas, de Teeteto y de Eudoxo, que le permitió seleccionar el material adecuado para organizar, con añadidos propios y por primera vez, un sistema de conocimientos matemáticos sujeto a una estructura unitaria.

Además, Euclides dispuso de la palanca que le permitió levantar esa estructura: la lógica aristotélica que le sirvió de argamasa para construir, con el material seleccionado un edificio de tal solidez que resistió casi sin deterioros los embates críticos de siglos. Con esa construcción Euclides instaura un método hoy llamado axiomático, que resultó el método científico por excelencia. Método

preconizado por Aristóteles como único a seguirse en toda ciencia deductiva y que fue adoptado por otros científicos griegos y luego por científicos modernos para convertirse hoy en el método general empleado en la matemática y en otras ciencias. Consiste en la denuncia previa de las propiedades que han de admitirse sin demostración para deducir de ellas, sin otro recurso que la lógica, todo el conjunto de proposiciones del sistema. Esas propiedades básicas son las que se llaman "axiomas" y que Euclides designó con los nombres de "postulados" y de "nociones comunes".

Por último, Euclides pudo imprimir un sello y conferir un sentido a su obra: el sello y el destino del platonismo, doctrina de la cual era adepto y de la cual distintos rasgos se advierten en los *Elementos*. Así, en sus proposiciones, cerca de quinientas, no figura una sola aplicación práctica, ni figura un solo ejemplo numérico. No obstante que tres libros de los Elementos se ocupan de aritmética, en ellos los números aparecen disfrazados de segmentos y las propiedades numéricas se demuestran operando con esos segmentos. Tampoco hay en los *Elementos* mención alguna a instrumentos geométricos y si bien suele decirse que la geometría de Euclides no admite sino construcciones con regla y compás hay que agregar que estas palabras no figuran en el tratado y que de atenerse al mismo, habría que decir que sólo admite construcciones con rectas y circunferencias, y siempre que tales construcciones obedezcan al sistema.

Otro rasgo platónico de los *Elementos* se ha querido ver en la importancia que asignaban a los poliedros regulares, a los que se dedica íntegramente el último libro considerándose que la construcción de esos "cuerpos platónicos" pudo constituir precisamente la finalidad de toda la obra. En cualquier caso, es indudable la atmósfera platónica o, mejor, platónico-pitagórico, que envuelve el tratado, que por igual satisface a la pretensión platónica de no ver en la geometría otro objeto que el conocimiento, ya la pretensión pitagórica de convertir su estudio en una enseñanza liberal, remontándose a los principios generales y estudiando los teoremas abstractamente y con la inteligencia pura. Es en vista de esa atmósfera que debe juzgarse la obra de Euclides, en especial al considerarse el sistema de axiomas básicos que, al sentir de la crítica moderna, no aparece revestido de las

precauciones necesarias, olvidando por un lado que tales observaciones son el resultado de más de veinte siglos de crítica y, por otro lado, que el método axiomático no es de fácil realización, ya por la elección de los supuestos básicos, ya por el desarrollo deductivo en el que pueden deslizarse admisiones implícitas de supuestos no denunciados explícitamente.

Cabe una última advertencia: lo que hoy llamamos *Elementos* de Euclides es un texto que ha llegado hasta hoy mediante una redacción de Teón de Alejandría del siglo IV y que pudo ser completado posteriormente con la ayuda de papiros y manuscritos antiguos, algunos anteriores a Teón, y aunque la redacción de éste es bastante completa y revisada, no debe olvidarse que es posterior en seis siglos a la redacción original, a la cual pudo haberse introducido durante ese lapso buen número de modificaciones e interpolaciones.

Los *Elementos* se componen de trece libros con un total de 465 proposiciones: 93 problemas y 372 teoremas. Gran parte de los libros se abre con un grupo de definiciones o, mejor términos según el vocablo utilizado por Euclides, a las que en el primer libro se agregan las proposiciones básicas, nuestros axiomas, que Euclides distingue en postulados y nociones comunes.

Las definiciones de Euclides no deben entenderse en un sentido lógico estricto. Algunas son meramente nominales; otras reflejan el sentido de la realidad existente en el mundo griego, admitiendo con esas definiciones la existencia de objetos de esa realidad; otras parecen tener sentido sólo en vista del desarrollo histórico anterior y hasta queda entre ellas algún resto fósil, como la definición de ángulo curvilíneo que en ningún momento se aplica en los *Elementos*. Lo importante es que tales definiciones no se utilizan como argumento deductivo en la construcción euclidiana, manteniendo solamente el papel de mención o descripción del ente definido, a quien en la construcción geométrica no se aplicarán sino los postulados, las nociones comunes o las proposiciones deducidas de esos principios. Cabe citar, por ejemplo, las definiciones de punto y de recta (nuestro segmento), típicas definiciones discutibles y bastante se ha discutido sobre ellas. Dice Euclides: "Punto es lo que no tiene partes. Una recta es la que yace igualmente respecto de todos los puntos". Estas definiciones no se

sostienen desde el punto de vista lógico, pero tal deficiencia no afecta a la construcción geométrica, pues en ésta nunca aparecen y cuando se habla de puntos o de rectas no se alude a su pretendida definición, sino a las propiedades de esos elementos que se deducen de los axiomas o de proposiciones demostradas, de manera que en definitiva se procede como en la geometría actual, considerando que el punto y la recta no son aquello, entes tan deficientemente definidos sino los entes abstractos definidos implícitamente por sus propiedades enunciadas en los axiomas.

Si alguna conclusión puede extraerse de las definiciones de Euclides es más de tipo histórico que lógico. Hoy sabemos que la geometría de los *Elementos* no es la geometría sino una geometría, de ahí que las definiciones configuran el ámbito y la índole de los entes que caracterizan a esa geometría. Así, son características las definiciones de "término", como extremo de algo, y de "figura" como lo que está comprendido entre uno o más término definiciones, que revelan el espíritu de la geometría euclidiana puesto de manifiesto en la predilección hacia lo visual, lo limitado, lo finito, que entraría en crisis con la introducción de las paralelas, cuya definición: "Son paralelas aquellas rectas de un plano que prolongadas por ambas partes en ninguna de éstas se encuentran", evidentemente implica un comportamiento de las figuras que excede todo término.

El número de axiomas sobre los que funda Euclides su sistema es reducido: trece en total, cinco postulados y ocho nociones comunes. (2)

Los postulados se refieren a los entes básicos específicamente geométricos y su función, de acuerdo con una plausible interpretación, consiste en fijar la posibilidad constructiva de las figuras formadas por rectas y circunferencias determinando así su existencia y unicidad. En efecto, los tres primeros postulados aseguran la existencia y unicidad de la recta, es decir, de un segmento prolongado indefinidamente cuando se dan dos punto, de ella; mientras que un cuarto postulado fija la existencia de una circunferencia cuando se da un punto (su centro) y un segmento (su radio).

Esos cuatro postulados fijan la existencia de rectas y circunferencias concebidas en forma independiente; quedaba por

fijar sus vinculaciones mutuas. Por razones intuitivas, o quizá llevado por la concepción que entrañaba la definición de figura, Euclides, admite la naturaleza de las posibles intersecciones de rectas con circunferencias, con rectas y de circunferencias, sin acudir al "postulado de la continuidad", hoy considerado indispensable y que, según dijimos, Euclides reemplazó por el "principio" de Eudoxo.

Quedaba pues a Euclides únicamente por demostrar o postular las posibilidades de la intersección entre dos rectas, que por su propiedad de prolongarse indefinidamente configuraban una estructura, no una "figura", a la cual la intuición no podía acoplar ni justificar comportamiento alguno.

El reconocimiento de este hecho pone de manifiesto uno de los rasgos geniales de Euclides, pues éste fija aquel comportamiento por medio de un postulado: el último de la serie y que más tarde se destacó como el "Quinto postulado", por la celebridad y notoriedad que alcanzó en vista de las discusiones, a que dio lugar; no obstante la buena dosis de evidencia intuitiva que comporta su enunciado. Y las geometrías no euclidianas que nacerán cerca de veintidós siglos más tarde no harán sino corroborar el acertado sentido matemático y lógico que llevó a Euclides a adoptar tan genial decisión.

En cuanto a las nociones comunes, que Euclides acepta sin demostración no son sino las operaciones fundamentales entre magnitudes sean geométricas o no.

Los primeros cuatro libros de los *Elementos*, de probable origen pitagórico, (3) comprenden las proposiciones más importante, de geometría plana elemental, referentes a triángulos, paralelogramos, equivalencias, teorema de Pitágoras, con quien se cierra el primer libro, circunferencias e inscripción y circunscripción de polígonos regulares.

Los dos libro, siguiente, se refieren a la proporcionalidad (4) sobre la base de la teoría de Eudoxo y sus aplicaciones: semejanza de polígonos y generalización de los problemas de aplicación de áreas de los pitagóricos.

Los tres libros siguientes son aritméticos o, mejor, en ellos se trata de teoría de números (5): divisibilidad, números primos,

progresiones geométricas cerrándose con la proposición en la que Euclides enuncia la expresión de los números perfectos pares.

El siguiente libro, el décimo, es el más extenso y el más difícil se ocupa de los irracionales (6) clasificando, mas no calculando, una serie de combinaciones de expresiones racionales e irracionales, tales como las que se presentarían como raíces de una ecuación bicuadrada.

Algunas de estas combinaciones se aplican más tarde en la teoría de los poliedros regulares, aunque ha de reconocerse que existe una verdadera desproporción entre el material acumulado en el libro décimo y el reducido uso que después se hace de él.

Los tres últimos libros de los *Elementos* son de un contenido más bien heterogéneo: podrían calificarse de geometría superior, no por su factura sino por tratar cuestiones ya de geometría del espacio, ya que implican nociones del actual análisis infinitesimal. En efecto, el libro XI expone algunos teoremas de geometría del espacio, necesarios para los dos libros siguientes: el XII comprende en cambio teoremas del plano o del espacio que exigen para su demostración la aplicación del método de exhaución, mientras que el XIII se ocupa exclusivamente de los cinco poliedro regulares y de su inscripción y circunscripción en la esfera. (7)

Tal es en síntesis la obra más importante de Euclides. Por grande que haya sido el aporte de los matemáticos anteriores, queda siempre para Euclides el mérito de haber aplicado por primera vez un método que resultó fecundo para la matemática y la ciencia en general, y el de haber estructurado sistemáticamente mediante ese método, en forma orgánica y ordenada, una gran cantidad de conocimientos matemáticos, en especial de geometría plana, sin olvidar que Euclides con sus *Elementos* acentúa una nota característica y permanente de la matemática: su carácter abstracto y su finalidad fincada exclusivamente en el Conocimiento. Ya Platón en la República lo había afirmado:"... aun aquellos que tengan escasos conocimientos de geometría no pondrán en duda que esta ciencia es todo lo contrario de lo que supondría la terminología de los geómetras... Es una terminología demasiado ridícula y pobre, pues como si se tratara de alguna finalidad práctica, ellos hablan siempre de cuadrar, de prolongar, de agregar,

cuando en verdad la ciencia se cultiva con el único objeto de conocer.”

Pero en matemática conocer es demostrar y los *Elementos* nos ofrecen el primer ejemplo en gran escala de ese fecundo juego de la razón, creador de nuevos conocimientos que se presentan atraídos por la irresistible fuerza del raciocinio y cuya única finalidad es el conocimiento mismo. Sin duda que para los gustos de hoy las demostraciones de Euclides son áridas, encuadradas en moldes formales demasiado rígidos, algo pedantes pero con todo ha de verse en el orden lógico, en los recursos deductivos y en los métodos de demostración otro de los méritos de los *Elementos* de Euclides.

Los editores antiguos agregaron a los trece libros de los Elementos un par de libros más (apócrifos) relacionados con los poliedros regulares. El llamado Libro XIV de los *Elementos* se debe a un matemático importante de la primera mitad del siglo II a. c.: Hipsicles de Alejandría; en verdad es una continuación natural del último libro de Euclides, pues se ocupa de los poliedros regulares anotando, entre otras, esta interesante propiedad: Si en una esfera se inscriben un cubo, un dodecaedro y un icosaedro, los lados del cubo y del icosaedro son proporcionales a las áreas y a los volúmenes del dodecaedro y del icosaedro, dependiendo el factor de proporcionalidad de la razón entre los segmentos que divide una recta en media y extrema razón.

Además Hipsicles se habría ocupado de aritmética, abordando un viejo tema de origen pitagórico, pues según Diofanto se le debería la definición de número poligonal P de p lados y n términos de una manera que traducida algebraicamente sería

$$P = n + \tfrac{1}{2} n (n - 1)(p - 2)$$

En cuanto al libro XV, muy inferior al anterior y que también se ocupa de poliedros regulares se atribuye a un discípulo de Isidoro de Mileto, matemático que floreció en el siglo VI.

Los *Elementos* constituyen un conjunto sistemático y sistematizado de conocimientos matemáticos griegos, pero no es el conjunto de todos esos conocimientos que poseían los griegos de la época de Euclides, de manera que para conocer el estado de la

matemática griega a principios del siglo III a. C. debemos agregar los conocimientos matemáticos que aquéllos no contenían.

Por lo pronto, los *Elementos* no podían contener sino aquella parte de la matemática griega compatible en el sistema euclideo, es decir, aquella que podía deducirse de los postulados que, explícita o implícitamente, le servían de fundamento. Pero es claro que tampoco podían contener todas las propiedades susceptibles de deducirse de estos postulados. Ya Proclo nos informa que Euclides no dio sino aquellas propiedades que podían servir de "elementos", pero fuera de estas omisiones deliberadas hay que agregar omisiones forzosas, representadas por las propiedades desconocidas en tiempos de Euclides y las que éste no estudió o no pudo deducir. En este sentido hay que señalar que tales omisiones son singularmente importantes en el campo de la geometría de la medida. Así no figura en los *Elementos* intento alguno para rectificar la circunferencia o arcos de circunferencia, como tan poco para "cuadrar" el círculo o sus partes o las extensiones superficiales totales o parciales de las figuras que limitaban los cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. En este sentido, la única propiedad que trae los *Elementas* es la proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados de sus diámetros respectivos. Igual cosa ocurre en el espacio: pueden compararse los poliedros entre sí y algunos cuerpos redondos entre sí (la esfera con la esfera, el cono con el cilindro), pero falta toda comparación entre los poliedros y los cuerpos redondos.

Además de esas omisiones deliberadas o forzadas los *Elementos* no podían contener aquellos conocimientos que no encuadraban en el sistema de los postulados euclideos tuvieran o no conciencia de ello los griegos, conocimientos a los que pertenecían, por ejemplo, todo lo concerniente a los tres problemas clásicos: trisección del ángulo, duplicación del cubo y cuadratura del círculo.

Otro grupo de conocimientos matemáticos griegos de comienzos del siglo III no podio estar incluido en los *Elementos*. Nos referimos ante todo a los elementos de aritmética práctica, la llamada "logística" (8) por los griegos, que abarcaba el sistema de numeración y las reglas operatorias elementales con enteros y fracciones, necesarias en las aplicaciones de la vida práctica o de la astronomía, topografía, mecánica, y, por otra parte, a ciertas ramas

de la ciencia natural que, por su fácil geometrización, se construyeron en íntima conexión con la matemática: astronomía, óptica, cinemática.

Esa íntima conexión se pone en evidencia considerando que ramas de la geometría del espacio, como la geometría esférica, (9) integraban la astronomía, mientras que ciertas nociones elementales relativas al movimiento: congruencia por superposición, generación de los cuerpos redondos, integraban la geometría.

Además de los *Elementos* indudablemente su obra máxima, se deben a Euclides otros escritos matemáticos algunos existentes, otros perdidos. Entre los escritos de índole geométrica (10) figuran los *Datos*, obra que parece haber sido escrita para aquellos que habiendo completado el estudio de los Elementos deseaban ejercitarse en la resolución de problemas que exigían el conocimiento de las propiedades del tratado de Euclides. En efecto, Datos se compone de un centenar de proposiciones en las que se demuestra cómo partiendo de ciertos datos -de ahí el nombre- quedaba determinada una figura ya en posición, ya en magnitud o ya en su forma.

De las restantes obras geométricas de Euclides, o que se le atribuyen se han perdido los originales griegos. De la obra *Sobre la división de las figuras* se dispone de versiones árabes; de los *Porismas* de función probablemente semejante a *Datos* no se tiene sino noticias; menos aún se conoce acerca de sus *Paralogismos* o *Sofismas* probablemente una obra didáctica escrita para adiestrar a los discípulos en el razonamiento correcto; de sus *Cónicas*, en cuatro libros que sería un tratado sobre este tema comprendido entre los de Aristeo y de Apolonio; y de sus *Lugares superficiales*, respecto del cual no hay todavía formada opinión sobre el significado del título.

Además de estas obras, estrictamente geométricas, se deben o atribuyen a Euclides otras obras sobre temas de la matemática griega en sentido lato. Así, se le atribuye un fragmento sobre la teoría matemática del sonido, un tratado elemental de astronomía titulado *Fenómenos*; un fragmento de *Sobre la palanca*, conocido a través de fuentes árabes y dos escritos sobre óptica: Una óptica que contiene las proposiciones fundamentales de óptica geométrica

fundadas sobre la hipótesis: "Los rayos que parten del ojo son rectilíneos": y una *Catóptrica* que estudia los fenómenos de la reflexión en espejos planos.

Notas complementarias

(1) Euclides y su obra según Proclo. La continuación del fragmento de Proclo ya mencionado en el Cap. III, reza así: "Euclides, el autor de los *Elementos*, no es mucho más joven que Hermotamo de Colofón y que Filipo de Mende; ordenó varios trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y dio además demostraciones indiscutibles de todo aquello que sus predecesores no habían demostrado con el rigor necesario. Euclides floreció durante el reinado de Ptolomeo I, pues es citado por Arquímedes que nació hacia fines del reinado de ese soberano. Además se cuenta que un día Ptolomeo preguntó a Euclides si para aprender geometría no existía un camino más breve que el de los *Elementos*, obteniendo la respuesta: en la geometría no existe ningún camino especial para los reyes. .. Euclides es, pues, posterior a los discípulos de Platón, pero anterior a Eratóstenes y a Arquímedes, que eran contemporáneos, según lo afirma Eratóstenes en alguna parte. Euclides era de opiniones platónicas y estaba familiarizado con la filosofía del Maestro, tanto que se propuso como objetivo final de sus *Elementos* la construcción de las figuras platónicas.

Se poseen de él muchas otras obras matemáticas escritas con singular precisión y de un elevado carácter teórico. Tales son la *Óptica*, la *Catóptrica*, *los Elementos de música*, y también los libros *Sobre las divisiones.* Pero son de admirar especialmente sus *Elementos de geometría*, por el orden que reina en ellos, por la elección de los teoremas y de los problemas considerados como fundamentales, puesto que no ha incluido todos aquellos que estaban en condiciones de dar, sino únicamente aquellos capaces de funcionar como elementos y también por la variedad de los raciocinios que son conducidos de todas las maneras posibles, ya partiendo de las causas, ya remontando los hechos, pero siempre

son convincentes e irrefutables, exactos y dotados del tono más científico. Agréguese que utiliza todos los procedimientos de la dialéctica: el método de división para determinar las especies, el de la definición para determinar los razonamientos esenciales; el apodíctico en la marcha de los principios a las cosas y el analítico en la marcha inversa de lo desconocido a los principios. Ese tratado también nos presenta en forma bien separada los distintos tipos de proposiciones recíprocas, ya muy simples, ya más complicadas, pudiendo la reciprocidad cumplirse entre el todo y el todo, entre el todo y una parte, entre una parte y el todo o entre una parte y una parte. ¿Y qué diremos del método de investigación, de la economía y del orden entre las distintas partes, del rigor con que cada punto queda fijado? Si pretendieras agregar o quitar algo, reconocerías de inmediato que te alejas de la ciencia y te acercas hacia el error y la ignorancia. Pues en verdad muchas cosas poseen la apariencia de ser verdaderas y de surgir de los principios de la ciencia, mientras en cambio se alejan de estos principios y engañan a los espíritus superficiales. Por eso Euclides expuso también los métodos que utiliza la mente que ve claro y con los que deben familiarizarse todos aquellos que quieren acometer el estudio de la geometría, advirtiendo los paralogismos y evitando los errores. Este trabajo lo ha realizado Euclides en su escrito *Sofismas*, en el que enumera ordenada y separadamente los distintos tipos de raciocinios erróneos, ejercitando sobre cada uno de ellos nuestra inteligencia mediante teoremas de toda clase en los que opone la verdad a la falsedad y pone en evidencia la demostración de la verdad con la refutación del error. Este libro tiene entonces por objeto purificar y ejercitar la inteligencia, mientras los *Elementos* constituyen la guía más segura y completa para la contemplación científica de las figuras geométricas.

(2) Los axiomas de Euclides. Euclides enuncia sus cinco postulados de la siguiente manera:

1º. Postúlese: que por cualquier punto se pueda trazar una recta que pasa por otro punto cualquiera;
2º. que toda recta limitada pueda prolongarse indefinidamente en la misma dirección;

3º. que con un centro dado y un radio dado se pueda trazar un círculo;
4º. que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí, y
5º. que si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

La primera impresión que produce la lectura de estos postulados es que enuncian proposiciones de índole distinta: los primeros tres aluden a construcciones; el cuarto a una propiedad, y el quinto tiene todo el aspecto del enunciado de un teorema. Pero si se encaran como juicios que afirman la existencia y unicidad de los elementos: punto, recta y circunferencia, con los que se construirá la geometría, su función se aclara. En efecto, los dos primeros postulados fijan la existencia de la recta determinada por dos puntos. A su vez, la unicidad de esa recta queda determinada por el cuarto postulado al fijar la igualdad de los ángulos rectos o, lo que es lo mismo, que las prolongaciones son únicas. Por otra parte, un sexto postulado que generalmente se incluye (erróneamente) entre las nociones comunes, afirma que entre dos rectas no existe espacio alguno.

Por su parte, el tercer postulado afirma la existencia y unicidad de una circunferencia dado su centro y su radio, de ahí que en definitiva los primeros cuatro postulados admitan la existencia de rectas y circunferencias o, en otros términos, permiten el uso de la regla y del compás como instrumentos geométricos. Aunque ya advertimos, que en ningún momento Euclides alude a estos u otros instrumentos geométricos.

Por último, el quinto postulado fija las condiciones para que dos rectas determinen un punto cuya unicidad quedaría asegurada por el postulado ya citado, que se incluye generalmente en las nociones comunes.

Es claro que, encarados desde este punto de vista, faltarían en la geometría euclidea los postulados acerca de las intersecciones de las circunferencias con rectas o con circunferencias que Euclides admite implícitamente. Y no deja de ser curioso señalar que los *Elementos* se abren con el problema: Construir un triángulo

equilátero de lado dado, donde tal construcción queda determinada mediante la intersección de dos circunferencias.

En cuanto a las nociones comunes, he aquí los ocho enunciados de Euclides:

1º. cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí;
2º. si a cosas iguales se agregan cosas iguales las sumas (Euclides dice: el total o la reunión) son iguales;
3º. si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales;
4º. si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los resultados son desiguales;
5º. las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí;
6º. las mitades de una misma cosa son iguales entre sí;
7º. las cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre sí;
8º. el todo es mayor que la parte.

Ya dijimos que generalmente se agrega una novena noción común: dos rectas no comprenden un espacio, enunciado que tendría su lugar más adecuado entre los postulados.

Se advierten fácilmente las funciones de las nociones comunes de Euclides: ellas postulan la igualdad, desigualdad, suma, resta, duplicación y división por mitades, de las "cosas", es decir, de nuestras magnitudes. Es interesante destacar la séptima noción común que introduce la noción de movimiento en la construcción geométrica.

Al observar en su conjunto los axiomas de Euclides, la primera observación a señalar es la ausencia de postulados relativos a la geometría del espacio; en efecto, Euclides no ha construido la geometría sólida en la forma tan completa y rigurosa que aparece en la geometría plana.

Pero si se limita el análisis a la geometría plana y se compara el sistema de axiomas de Euclides con un sistema moderno, por ejemplo el de Hilbert, se advierte que los postulados de Euclides desempeñan el papel de los axiomas de enlace y de las paralelas de Hilbert; y que las nociones comunes de Euclides sustituyen los axiomas de congruencia de Hilbert; de ahí que faltarían en los *Elementos* los axiomas del orden y el de la continuidad, admitidos implícitamente por Euclides, el último como "principio". Tales

omisiones, como el de algún otro axioma necesario desde el punto de vista lógico y técnico, no perjudican sin embargo a la construcción euclidea que en momento alguno peca contra ellas.

Dado el carácter de la geometría griega, tales omisiones se explican no sólo por el carácter fuertemente intuitivo de los axiomas omitidos, sino también porque se veía en esos enunciados algo superfluo, en vista de que para los griegos no eran imaginables las proposiciones contrarias.

(3) Los libros pitagóricos de los Elementos. Considerando como tales los primeros cuatro libros de los Elementos digamos que el primer libro, de 48 proposiciones, puede considerarse dividido en dos partes: las primeras 32 proposiciones se refieren a las propiedades de los triángulos, terminando con el teorema característico de la geometría euclidiana de ser constante el igual a dos rectos la suma de los ángulos de cualquier triángulo. Cabe agregar que el "quinto postulado", el de las paralelas, por cuanto se deduce de él la existencia de la paralela única a una recta desde un punto exterior no se introduce hasta la proposición 19, lo que prueba que Euclides trató evidentemente de evitarlo en las 18 anteriores, grupo de proposiciones que constituye de por sí una geometría independiente del quinto postulado.

Las últimas 16 proposiciones del libro se refieren en cambio a paralelogramos y triángulos y sus equivalencias para terminar, como último par de proposiciones, con los teoremas, directo y recíproco de Pitágoras. La demostración de ese teorema, según comentaristas antiguos. Pertenecería al mismo Euclides.

El libro segundo de 14 proposiciones se abre con la definición de una figura muy utilizada en las demostraciones euclidianas de equivalencias: es el *“gnomon”,* palabra que parece tener un origen astronómico pues indica la posición de una barra vertical descansando sobre un plano horizontal, y utilizada para medidas astronómicas o de tiempo. En la matemática el *gnomon* es en general todo aquello que agregado aun número o figura convierte a estos en un número o figura semejante. Así cualquiera de las escuadras de carpintero que utilizamos en las demostraciones aritméticas, de los pitagóricos, en un gnomon.

En este segundo libro aparece el “álgebra geométrica”, representada por 10 proposiciones que traducen geométricamente las siguientes propiedades, expresadas algebraicamente con los símbolos actuales:

$$m (a + b + c +...) = ma + mb + mc +...$$

$$(a + b) a + (a + b) b = (a + b)^2$$

$$(a + b) a = a^2 + ab$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$ab + [½ (a + b) – b]^2 = [½ (a + b)]^2$$

$$(2a + b) b + a^2 = (a + b)^2$$

$$(a + b)^2 + a^2 = 2 (a + b) a + b^2$$

$$4 (a + b) a + b^2 = [(a + b) + a]^2$$

$$a^2 + b^2 = 2 [[½ (a + b)^2 + [½ (a + b) – b]^2]$$

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2 [a^2 + (a + b)^2]$$

Las cuatro últimas proposiciones comprenden los problemas; división en media y extrema razón; "cuadrar" cualquier figura poligonal, y las generalizaciones del teorema de Pitágoras a los triángulos acutángulos y obtusángulos.

El libro tercero, de 37 proposiciones, estudia las propiedades de la circunferencia, terminando por el teorema de la constancia del producto de los segmentos determinado por las secantes trazadas desde un punto interior o exterior. El libro cuarto, de 16 proposiciones, se refiere a la inscripción y circunscripción de polígonos regulares a una circunferencia enseñando Euclides a construir efectivamente los polígonos regulares de 4, 5, 6 y 15 lados, la construcción de polígonos regulares por duplicación de lados era conocida; en cambio no hace alusión a los polígonos cuyo número de lados es 7, 9, 11 Y 13 que no pueden construirse con regla y compás.

(4) La proporcionalidad en los *Elementos*. Los libros quinto y sexto tratan de la proporcionalidad y la semejanza de acuerdo con los fundamentos sentados por Eudoxo. El libro quinto, de 25 proposiciones, expone la teoría geométrica de la proporcionalidad, independiente de la naturaleza de las cantidades proporcionales: entre las definiciones aparece el "principio" de Eudoxo (nuestro axioma de la continuidad) y la definición, también de Eudoxo de la proporcionalidad mediante desigualdades.

El sexto libro aplica de 33 proposiciones, esa teoría general a las magnitudes geométricas dando nacimiento a la teoría de los polígonos semejantes; y como aplicación la generalización de los problemas de aplicación de áreas de origen pitagórico y que involucran la resolución de la ecuación algebraica de segundo grado en forma general, pero con ropaje geométrico.

El primero de esos problemas, llamado de aplicación simple, consiste en construir un polígono equivalente a un polígono dado P y semejante a otros polígonos. El problema se reduce a construir una media proporcional, pues si x y a son lados homólogos del polígono que se busca y S, será $x^2 : a^2 = P : S$ que, por otra parte, es la expresión de una ecuación de segundo grado en x incompleta.

El segundo problema, llamado de aplicación por defecto, consiste en construir sobre una parte de un segmento dado a un paralelogramo equivalente a un polígono dado P de tal manera que el paralelogramo "faltante", de igual altura que el anterior construido sobre la otra parte del segmento dado, sea semejante a un paralelogramo dado S. Pero al enunciado de este problema Euclides agrega. Es necesario que P no exceda al paralelogramo semejante a S construido sobre la mitad del segmento. En efecto, un teorema anterior demostraba que tal condición es indispensable para que el problema de aplicación de áreas por defecto tenga solución.

Si S_0 es este paralelogramo máximo Euclides lleva el problema al caso anterior determinado un paralelogramo semejante a S y equivalente $S_0 - P$. Pero en verdad la incógnita x (la parte faltante) no es sino una cualquiera de las dos raíces positivas de la ecuación de segundo grado $x (a - x) = a^2 P : 4 S_0$.

El tercer caso semejante al anterior, de aplicación de áreas por exceso, consiste en construir sobre el segmento prolongado el paralelogramo equivalente a P de manera que el paralelogramo construido sobre la prolongación sea semejante a S. En este caso el problema siempre posible, se lleva al primer caso donde el paralelogramo que se busca es equivalente a $S_0 + P$, y la incógnita x (el segmento excedente es la raíz positiva de la ecuación

$$x\,(a-x) = a^2\,P : 4\,S_0\,.$$

(5) La aritmética de los Elementos. No existe en los *Elementos* el menor intento de fundar la aritmética sobre un sistema de postulados. Los tres libros que se dedican a la aritmética, con un total de 102 proposiciones, se abre con un conjunto de 12 definiciones donde se dice que "Unidad es aquello por lo cual cada cosa singular se dice uno"; "Número es una pluralidad compuesta de unidades", para luego seguir con las definiciones de números mayor y menor, múltiplo y submúltiplo, par e impar, primo y compuesto, etcétera; también se habla de números planos (de dos factores), números sólidos (de tres factores), de los cuales el cuadrado y el cubo son casos particulares, para terminar con la definición de números perfectos como aquellos números suma de sus divisores, excepto sí mismo.

En el libro séptimo se expone la teoría del máximo común divisor, por el método de las divisiones sucesivas, y del mínimo común múltiplo que define así: Dados dos números a, b, se expresa la fracción $a : b$ en la forma irreducible $a' : b'$, su mínimo común múltiplo es $ab' = a'b$, lo que equivale a tomar como mínimo común múltiplo el producto de los números dividido por su máximo común divisor.

Los otros dos libros contienen varios teoremas importantes:

a) la serie de los números primos es ilimitada;

b) la suma de los términos de una progresión geométrica, expresada en la forma con nuestros símbolos,

$$(a_2 - a_1) : a_1 = (a_n - a_1) : S\,, \qquad donde \quad a_1, a_2, a_n$$

son los términos primero, segundo y último de la progresión, y S es la suma de los precedentes a a_n; expresión como es fácil comprobar, que equivale a la actual;

c) la aplicación de la expresión anterior a la progresión de razón duplicada, es decir 2, y primer término la unidad diferencia entre el término que sigue al último menos el primero; y
d) la expresión de los números perfectos pares.

Este último teorema, sin duda la contribución aritmética más original de Euclides, expresa que si la suma de una progresión geométrica de razón duplicada es un número primo, ese número por el último término de la progresión es un número perfecto. Con nuestros símbolos: si $S^{n+1} - 1$ es primo, el número $N = 2^n S$ es un número perfecto. En efecto, los divisores de N son: 1, 2, 2^2,…2^n, S, $2S$, 2^2S,…$2^{n-1}s$, y su suma es

$$S + S(1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{n-1}) = S(1 + 2^n - 1) = 2^n S = N$$

y N es perfecto.

Aunque Euclides no trae ningún ejemplo numérico es indudable que conocía los números perfectos más pequeños dados por su expresión. Por lo demás se sabe que ya Nicomaco (s. I) da los cuatros perfectos menores 6, 28, 496, y 8128 que corresponde a n = 1, 2, 4, 6 (para n impar, con excepción de 1, S no es primo). Actualmente la lista de números perfectos pares se ha extendido, todos pertenecientes a la expresión euclidea y aunque se conoce la forma que tendrían los perfectos impares no se conoce ninguno de ellos.

(6) Los irracionales en los *Elementos*. El libro decimo es el más extenso, pues comprende 115 proposiciones, y en él se estudian en forma geométrica las propiedades de un cierto grupo de expresiones irracionales, hoy llamadas cuadráticas y bicuadraticas con algunas aplicaciones. Por ejemplo, demuestra que en el problema de aplicación de áreas por defecto de expresión algebraica $x\ (a - x) = ¼\ b^2$, los segmentos x y $(a - x)$ son conmensurables si los son a y $\sqrt{a^2 - b^2}$.

En definitiva el libro contiene una clasificación de irracionales bicuadraticas que pueden resumirse algebraicamente considerando la identidad

$$\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}} = \sqrt{1/2\left(\sqrt{p} + \sqrt{p - q}\right)} \pm \sqrt{1/2\left(\sqrt{p} - \sqrt{p - q}\right)}$$

y considerando los 12 casos posibles que se obtiene combinando: a) dos signos superiores o inferiores; b) que p o q o ninguno de los dos sea un cuadrado perfecto y c) que p y $p - q$ sean o no conmensurables.

(7) Los tres últimos libros de los elementos. Tienen 75 proposiciones, y están dedicados en su mayor parte de la geometría del espacio. En el primero de esos libros se antepone la definiciones de ángulos diedros y poliedros y de poliedros y cuerpos redondos, utilizándose para las definiciones de estos últimos el movimiento pues la esfera, el cilindro y el cono se definen mediante la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro, de un rectángulo alrededor de uno de sus lados y de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, respectivamente.

Euclides no establece postulado alguno para la geometría del espacio, omisión lógica cuyas consecuencias se advierten en los primeros teoremas de estos libros en los que se pretende vanamente demostrar la existencia del plano, del cual por lo demás se da una definición defectuosa.

La geometría del espacio en los *Elementos* sigue en la forma actual aunque cabe destacar que Euclides no procede en este campo en la forma ordenada y completa como había procedido en geometría plana; se advierten además ciertas omisiones: por ejemplo, se habla de paralelismo entre rectas o entre planos, pero no entre rectas y planos; como si Euclides no se hubiera propuesto sino reunir el material indispensable para la demostración de los teoremas de los libros siguientes, en especial del último.

El segundo de estos tres libros se caracteriza por el hecho de ser sus teoremas aquellos que exigen el método de exhaución introducido por Eudoxo, método que Euclides aplica únicamente en estos cuatro casos: proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados construidos sobre los diámetros respectivos e igualmente entre las esferas y los cubos construidos sobre esos diámetros; equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual base y altura e igualmente esa equivalencia entre cono y cilindro.

El último libro de los Elementos está totalmente dedicado a los cinco poliedros regulares con un teorema final que expresa las relaciones entre las aristas de esos poliedros y el diámetro de la esfera circunscrita.

Aparece por último, como lema probablemente añadido posteriormente el teorema, que se atribuye a los pitagóricos, según el cual fuera de los cinco poliedros regulares conocidos no existe ningún otro poliedro regular, demostración que se funda en la naturaleza especial de los ángulos poliedros que se forman en los vértices de los poliedros regulares.

(8) La logística griega. Ya aludimos a los sistemas de numeración de los griegos. El sistema utilizando las letras del alfabeto permitían escribir los números hasta el millar; anteponiendo una coma a las letras que indicaban las unidades se tenían las unidades correspondientes de los millares, llegándose así hasta la miríada (10^4), a veces simbolizada por una M. Para números superiores a las miríadas se utilizaron reglas diferentes, mientras que para las fracciones de numerador unitario se señalaba el denominador con un signo especial, aunque también parece que usaron fracciones con numerador y denominador. En astronomía se utilizó con preferencia el sistema sexagesimal.

En cuanto a las reglas operatorias, poco se sabe, fuera de algunos ejemplos diseminados en los textos científicos; es probable que para la suma, la resta y, quizá, para la multiplicación se utilizara el ábaco; para operaciones más complejas operaban con los números escritos con letras en una forma semejante a la actual.

σ ξ ε	265	265
σ ξ ε	256	256
δ α	40000 12000 1000	1325
M M ,β ,α	12000 3600 300	1590
α	1000 300 15	530
M ,β γ χ τ	70225	70225
,α τ κ ε		
ζ		
M σ κ ε		

He aquí un ejemplo de multiplicación "griega", donde las letras superpuestas a las M indican las unidades de miríadas y las rayas superpuestas a las letras es una manera de evitar la confusión entre letras y números. A la derecha de la multiplicación griega está la traducción en símbolos numéricos actuales y la multiplicación tal como la efectuaríamos hoy.

(9) *La "Esférica"* antes de Euclides. Es sistemática en los *Elementos* la ausencia de las propiedades relativas a las figuras trazadas sobre la esfera. Si se exceptúa la definición y la proporcionalidad entre las esferas y los cubos construidos sobre sus diámetros, la esfera sólo se presenta en su relación con los poliedros inscritos y circunscritos. Este significativo silencio hizo pensar en la existencia de tratados que se refirieran especialmente a esa rama de la geometría del espacio y que, por su aplicación a la astronomía se consideraran más pertenecientes a esta última ciencia que a la geometría.

En efecto, se tienen noticias acerca de una *Esférica* del periodo helénico aunque de autor no bien individualizado, atribuyéndose el tratado a Eudoxo en vista de que éste en su teoría del sistema planetario utiliza esferas concéntricas; amén de sus méritos como matemático. En cambio, se conoce el autor: Autolico de Pitana del siglo IV, de una *Esférica* aunque de carácter más astronómico que geométrico, a la cual se asemejaría la obra *Fenómenos* de Euclides.

(10) Las obras geométricas de Euclides. *Datos*, que además de los *Elementos* es la obra geométrica de Euclides aún existente, contiene problemas de este tipo: si se conoce un ángulo de un triángulo y la razón entre el rectángulo formado por los lados adyacentes al ángulo y el cuadrado del lado opuesto, el triángulo está dado en su forma (Euclides dice en "especie') es decir, queda determinado un conjunto de triángulos semejantes. Otros problemas son aplicaciones de álgebra geométrica con reminiscencias del álgebra de los babilonios.

Respecto de la obra sobre la división de las figuras que cita Proclo, sólo se tienen noticias mediante un par de versiones árabes sobre la base de las cuales se ha reconstruido, comprendiendo un conjunto de proposiciones en las que se plantea el problema de

dividir figuras planas, polígonos, círculo y hasta una figura mixtilínea, mediante rectas que cumplen ciertas condiciones, en figuras parciales que deben cumplir también condiciones prefijadas.

Otra obra geométrica (pérdida) sobre la cual se han tejido numerosas conjeturas es *Porismas* de la cual, sobre la base de las noticias que trae Pappus, se han hecho varias reconstrucciones. Pappus dice que esta obra en tres libros compuesta de 38 lemas 171 teoremas era "una colección ingeniosa de una cantidad de cosas útiles para resolver los problemas más difíciles". El mismo significado del título no es claro, pues "porisma" puede significar "corolario", pero también tiene otro sentido al cual se refiere Pappus al decir que "los diversos tipos de porismas no son ni, teoremas ni problemas, representando en cierto sentido una forma intermedia". De ahí que Chasles, que es uno de los matemáticos que reconstruyó la obra dice que los porismas son teoremas incompletos que expresan ciertas relaciones entre elementos que varían de acuerdo con una ley determinada, y que tendrían por objeto no sólo demostrar esas relaciones, sino completarlas determinando la magnitud y posición de las figuras que satisfarán aquellas relaciones.

Arquímedes

Si Euclides es un maestro y un sistematizador, no muy original, la figura que le sigue cronológicamente, Arquímedes de Siracusa es el arquetipo de matemático original, que al igual que los científicos de hoy, no escribe sino monografías o memorias originales, relativas a los más variados campos de la matemática antigua en sentido lato: aritmética, geometría, astronomía, estática e hidrostática. Fue, en particular, la incorporación al saber científico de estas dos ramas de la física la circunstancia que explica la extraordinaria influencia que ejercieron los escritos de Arquímedes sobre los hombres del Renacimiento y de la Edad Moderna,

convirtiéndoselo en una de las grandes figuras de la historia de la ciencia.

En verdad, su figura ya fue célebre y famosa para sus conciudadanos de Siracusa. Quizá lo fuera por sus méritos científicos o por las excentricidades y grandes inventos que le atribuyeron o por su vinculación, quizá parentesco, con la familia real. Hasta se cita una Vida de Arquímedes escrita por uno de sus contemporáneos.

Sin embargo, hoy esa vida solo puede reconstruirse sobre los datos, no muy abundantes, de diversos historiadores, en especial de los que se ocuparon de las guerras Púnicas. El hecho indudable de haber muerto Arquímedes en el saqueo que siguió a la caída de Siracusa en manos de los romanos en 212, combinado con otro dato, según el cual Arquímedes habría vivido 75 años, ubica la fecha de su nacimiento en el año 287 a. C.

Las actividades de su padre, astrónomo, influyeron sin duda en la vocación y formación científica de Arquímedes que, desde joven, estuvo en Alejandría donde, sin pertenecer al Museo, trabó amistad con varios maestros alejandrinos con quienes mantuvo luego correspondencia científica: fueron los sucesores de Euclides: Conón de Samos y, a la muerte de éste Desiteo de Pelusa, y Eratóstenes. Regresado a Siracusa dedico toda su vida a la investigación científica.

Esa vida, como la de otros grandes sabios, fue embellecida o deformada por la imaginación popular que la revistió de anécdotas más o menos verosímiles o la exaltó con elogios que a veces contribuyeron a rodear su existencia de una atmósfera sobrenatural.

Plutarco, al referirse a la vida del general romano Marcelo que conquistó Siracusa, describe la vida de Arquímedes y le confiere grandes dotes de mecánico práctico y de ingeniero militar aunque en ninguno de los escritos del siracusano aparecen menciones a investigaciones en esos campos. Este silencio a que Arquímedes consideraba la mecánica y, en general, todo arte tendiente a satisfacer nuestras necesidades como artes “innobles y oscuras”, y por eso no dejó nada escrito sobre ellas.

Su muerte misma fue rodeada de cierta atmósfera novelesca y narrada de diferentes maneras; y el acto del soldado romano que

atraviesa con su espada al viejo sabio absorto ante una demostración geométrica no dejó de excitar la imaginación. Con todo, es probable que la muerte de Arquímedes fuera lamentada por Marcelo, el hecho es que fue respetada la voluntad del sabio en el sentido de grabar en su tumba uno de sus más hermosos teoremas: el relativo a la esfera inscripta en un cilindro. Y esa figura permitió, siglo y medio después, que Cicerón descubriera, ya perdida y olvidada entre la maleza, la tumba del célebre siracusano en una época en la que sus conciudadanos ya habían olvidado su figura y su fama.

Esa fama hoy sobrevive, no por su vida, sino por sus escritos, cabales trabajos originales en los que se da por conocido todo lo producido antes sobre el tema y se aportan nuevos elementos.

En esos escritos siguió rigurosamente el método euclidiano de fijar previamente las hipótesis que postulaba, a mas que seguían los teoremas cuidadosamente elaborados y terminados; en general utilizando el método sintético sin mencionar el camino seguido para llegar a la tesis de la proposición que demuestra de ahí que en general no es de lectura fácil, aunque para demostrar una vez más la amplitud de su talento matemático, proporciona una notable excepción a esta regla general en su escrito *Método*.

Solía enviar a amigos de Alejandría los trabajos que escribía, a veces sólo los enunciados de los resultados sin la demostración, costumbre que en alguna ocasión le permitió formular cierta mordaz observación acerca de los profesores alejandrinos. En efecto, al advertir en una ocasión que algunos enunciados remitidos eran falsos, sin que ninguno de los profesores hubiera señalado el error, pudo decir Arquímedes: "…aquellos que pretenden haber resuelto todos los problemas, pero sin dar la demostración quedan refutados por el hecho mismo de haber declarado que demostraron algo imposible".

No es fácil establecer un nexo lógico o cronológico entre los escritos de Arquímedes. En parte por la índole monográfica de los mismos, en parte por el distinto contenido que se refiere a matemática, a astronomía y a física, sin olvidar que probablemente algunos de sus escritos se han perdido.

Se conocen de Arquímedes, en versión original, cuatro escritos de geometría: dos de geometría plana: *De las espirales*; *De la*

medida del círculo, y dos de geometría del espacio: *De la esfera* y *Del cilindro* (dos libros) y *De los conoides y de los esferoides*.

Siguiendo la norma euclidea, hay definiciones en todos esos escritos, excepto *De la medida del círculo*, y postulados en *De la esfera y del cilindro*. (1)

El primer libro de este escrito puede considerarse un complemento de los *Elementos* de Euclides, al demostrar una serie de teoremas, relativos a las áreas y volúmenes de los cuerpos redondos, omitidos en los *Elementos*.

En esas demostraciones, por ejemplo en el caso del área de la esfera o del segmento esférico, pero también en otros libros geométricos, Arquímedes expone propiedades que traducidas algebraicamente, representan igualdades o desigualdades entre sumatorias que en conexión con el postulado de Arquímedes y el método de exhaución, permiten llegar geométricamente a aquellas áreas y volúmenes que hoy se obtienen analíticamente mediante los recursos del análisis infinitesimal. (2)

Algunos de los teoremas del primer libro del escrito *De las esfera y del cilindro*; área lateral del cono y del cilindro, área de la esfera se han incorporado a nuestra geometría elemental mientras que otros ofrecen tal sencillez y simetría que explican el deseo de Arquímedes de quedar sus resultados eternamente grabados en su tumba.

El segundo libro del escrito comporta una serie de problemas, algunos de los cuales, nada fáciles, conducen a problemas del tipo de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo. (3)

En cierto sentido el único libro *De los conoides y de los esferoides* es una continuación del anterior, pues en él se estudian las propiedades métricas de los sólidos que Arquímedes designa con el nombre de conoides (nuestro paraboloide y una del hiperboloide de dos hojas, de revolución) y esferoides (nuestro elipsoide de revolución). (4)

Una última contribución conocida de Arquímedes a la geometría del espacio, de índole diferente de las anteriores, la proporciona Pappus cuando al hablar de las figuras inscritas en la esfera, cita los poliedros regulares y 13 poliedros semiregulares que, según Pappus, habría descubierto Arquímedes, pero sin señalar cómo llegó a ellos. (5)

En geometría plana la contribución más original de Arquímedes es el escrito *De los espirales*, uno de los más difíciles por sus largas demostraciones, la concisión de su texto, que subentiende muchas relaciones intermediarias, la aplicación de expresiones en forma geométrica de la suma de términos en progresión aritmética o de sus cuadrados; todo hace su lectura nada fácil, circunstancia que explica que en los siglos XVII y XVIII hubo matemáticos que desistieron de entender este escrito y hasta quien, frente a sus dificultades, prefirió considerar erróneos sus resultados. También en este escrito aparecen problemas no resolubles con regla y compás que Arquímedes da por resueltos por inserción, pero sin señalar la construcción correspondiente. (6)

El escrito *De la medida del círculo*, muy breve, es uno de los más importantes de Arquímedes, pues en él no sólo demuestra la equivalencia de los problemas de la rectificación de la circunferencia y el de la cuadratura del círculo, sino que al dar una solución aproximada de esos problemas, con un valor bastante cómodo para nuestro número π, aporta interesantes cuestiones aritméticas. (7)

Queda aún un tema de geometría plana que Arquímedes trata en un escrito que, desde el punto de vista de hoy, no es exclusivamente geométrico. Es *Cuadratura de la parábola*, primer ejemplo de cuadratura de una figura mixtilínea (las lúnulas de Hipócrates habían sido las primeras figuras cuadrables curvilíneas) y que Arquímedes logra por un doble camino: uno exclusivamente geométrico y otro empleando los recursos de la estática, mediante la ley de la palanca que él mismo había demostrado. (8)

Por último se atribuye a Arquímedes un llamado *Libro de los Lemas,* conocido en su versión árabe, que contiene una serie de proposiciones de geometría plana, algunas muy elementales, pero otras con interesantes equivalencias entre figuras circulares, que es muy posible que sean originales del geómetra de Siracusa. (9)

A estos escritos puramente geométricos, cabe agregar en la producción de Arquímedes, los escritos sobre temas de ciencia natural: astronomía y física, que los griegos incluían, por su índole, en la matemática. El escrito que, sin tener finalidad astronómica, se ocupa incidentalmente de astronomía, es un trabajo dedicado al hijo del tirano de Siracusa y de quien era preceptor, con el objeto

de probarle que el número de granos de arena del mar no era infinito, haciendo alusión al verso de Pindaro "numerosas como las arenas del mar". Con tal fin se propone contar o, mejor, dar nombre al número de granos de arena que llenaría no sólo a todos los mares, sino a todo el universo, adoptando para éste sus máximas dimensiones posibles o imaginables.

El interés de este escrito, conocido como *Arenario o El contador de arenas*, es múltiple. Por un lado, justifica la fama que, según testimonios antiguos, poseía Arquímedes como astrónomo, en vista de los conocimientos astronómicos que el escrito revela, figurando hasta un procedimiento experimental para determinar aproximadamente el diámetro aparente del Sol. Por otra parte, en el *Arenario* figura un párrafo importante desde el punto de vista histórico, pues constituye la única alusión conocida al sistema heliocéntrico de Aristarco de Samas, concepción del universo que Arquímedes no comparte, pero que adopta por cuanto sus dimensiones eran mayores de las del universo que ordinariamente concebían los astrónomos de la época. A estas notas de índole extra-matemático cabe agregar que en el *Arenario* figura un sistema especial de numeración: las "octadas", (10) que Arquímedes crea ante la necesidad de manejar números muy grandes, sistema que le facilitará contar o mejor, nombrar esos números.

Por último, se deben a Arquímedes dos escritos que pueden calificarse de física matemática que proporcionaron los primeros resultados perdurables de estática: la ley de la palanca y el llamado "principio de Arquímedes”.

Fuera de las reflexiones sobre mecánica práctica vinculadas con las máquinas simples, muy poco había progresado la mecánica como rama de la matemática; será Arquímedes quien concederá jerarquía científica a esta rama, mediante sus escritos: *Sobre el equilibrio de los planos* (en dos libros) y *De los cuerpos flotantes* (también en dos libros), que se ocupan, respectivamente, de estática y de hidrostática.

Del equilibrio de los planos, donde la palabra "planos" se refiere a figuras planas limitadas, es un estudio acerca de la determinación de los centros de gravedad y de las condiciones de equilibrio de cuerpos geométricos, cuando en cada uno de sus puntos se

considera, además de su posición, el peso; aunque Arquímedes no estudia sino cuerpos homogéneos. El escrito está construido a la manera euclidea con definiciones, postulados y teoremas, comprendiendo el primer libro las condiciones de equilibrio de la palanca, y la determinación de los centros de gravedad de algunos polígonos, mientras que en el segundo libro llega a determinar el centro de gravedad de un trapecio parabólico, es decir la porción de parábola comprendida entre dos cuerdas paralelas. (11)

Si respecto de la estática, subsiste aún alguna duda acerca de la posibilidad de existencia de escritos antiguos sobre esa rama de la mecánica anteriores a Arquímedes no hay duda alguna respecto de la hidrostática, cuyo creador indiscutible es Arquímedes con su escrito *De los cuerpos flotantes,* con el cual se dan científicamente las condiciones de equilibrio de los cuerpos sumergidos parcialmente, se enuncia el hoy llamado "principio de Arquímedes" y se estudian las aplicaciones del principio al caso de un casquete esférico y de un segmento de paraboloide de revolución. En realidad, en la forma dada por Arquímedes, los problemas de hidrostática se reducen a problemas de estática sólo algo más complicados, al hacer intervenir la razón entre los pesos específicos del cuerpo y del fluido. (12)

Terminemos con los escritos de Arquímedes reseñando quizás el más original de todos ellos: *Del método relativo a los teoremas mecánicos*, que se conoce abreviadamente como *Método*, en el que explota hábilmente las propiedades de la palanca y de los centros de gravedad.

Recordemos que muchos de los resultados logrados por Arquímedes: áreas, volúmenes, centros de gravedad, se obtienen hoy mediante los recursos del cálculo integral, recursos que los matemáticos griegos sustituyeron por el "método de exhaución" de Eudoxo. Pero, como dijimos, este método es un método de demostración, no de descubrimiento y por tanto exige conocer de antemano el resultado a demostrar.

En algunos casos era fácil prever ese resultado, ya por inducción, ya por intuición, pero en otros casos tal previsión era imposible. ¿Cómo podía, por ejemplo, preverse la complicada posición que ocupa el centro de gravedad de un trapecio parabólico? Este hecho no dejó de intrigar a los matemáticos

occidentales cuando en el siglo XVI comenzaron a difundirse los escritos de Arquímedes, y no faltó el matemático que afirmara que seguramente Arquímedes disponía de un método especial para lograr esos resultados, método que habría mantenido en secreto.

Tal afirmación resultó una verdad a medias; en efecto, Arquímedes había ideado un método con ese objeto, pero no lo mantuvo en secreto, sino que lo expuso en una larga carta destinada a Eratóstenes, que estaba en Alejandría, carta que lamentablemente quedó desconocida para Occidente hasta 1906 cuando el historiador de la ciencia Heiberg descubrió una copia en un palimpsesto de Constantinopla. Esa carta es hoy el *Método* de Arquímedes.

En ese escrito figuran varias determinaciones "mecánicas" de equivalencias y centros de gravedad, aunque su finalidad fue la de hacer conocer dos cubaturas especiales, de la una cilíndrica y de la doble bóveda cilíndrica. (l3)

Por último, cabe citar como de Arquímedes un par de escritos que se clasificarían hoy entre los problemas de matemática recreativa. Uno de ellos, conocido como *Stomachion* es geométrico y consiste en llenar una cavidad rectangular con 14 figuras poligonales, cada una de las cuales era conmensurable con el total. El otro problema es aritmético y consiste en un dificilísimo problema de análisis indeterminado de segundo grado, denominado, “Problema de los bueyes”, que probablemente Arquímedes enunció, pero no resolvió, pues según algunas versiones su solución transporta, a números de un centenar de miles de cifras.

Además de los escritos anteriores, se atribuyen a Arquímedes obras actualmente perdidas, de las que se tienen noticias ya por el mismo autor, ya mediante fuentes árabes o griegas. Así, en el *Arenario* Arquímedes se refiere a un escrito aritmético dirigido a Zeusipo acerca de la denominación de los números; además de una obra *Sobre la palanca* que le atribuyen autores antiguos y su estudio de los poliedros semiregulares ya citados, otros autores lo dan como autor de una *Óptica*, así como de obras astronómicas: construcción de una esfera planetaria, longitud del año.

Con Arquímedes la matemática griega llega a su apogeo. Sin duda que él encontró una ciencia ya madura, a la que agregó

nuevos capítulos o mejoró los existentes. Pero en esa obra de complemento y de perfeccionamiento, demuestra una mayor flexibilidad que torna más maleable el rígido molde euclideo y le confiere mayor riqueza y autonomía, desvinculando casi totalmente los lazos que habían mantenido ligada la matemática con la filosofía. Esa mayor libertad y autonomía, sin descuido del rigor, se refleja en la elección de los postulados, en las aplicaciones a la ciencia natural, en sus incursiones por el campo de los números y de la matemática aproximada, y convierten a Arquímedes en un matemático, y un gran matemático, en el sentido actual y permanente del vocablo.

Notas complementarias

(1) Definiciones y postulados geométricos de Arquímedes. En él escrito *De la esfera y del cilindro*, hay seis definiciones, de las cuales las cuatro primeras son:

1º. Existen en el plano ciertos arcos de curva totalmente situados de un mismo lado de las rectas que unen los extremos del arco;

2º. llamo cóncava en la misma dirección una línea tal que la recta que une dos puntos cualesquiera de ella, o bien está toda del mismo lado de la línea, o bien está parte del mismo lado y parte sobre la línea misma;

3º. de igual modo hay ciertas porciones de superficie, no situadas en un plano, pero cuya línea extrema está en un plano situado totalmente del mismo lado respecto de la superficie;

4º. llamo cóncavas en la misma dirección superficies tales que las rectas que unen dos puntos cualesquiera de ellas, o bien están todas del mismo lado de la superficie, o bien parte del mismo lado y parte sobre la superficie misma.

Con estas definiciones no sólo se introduce un nuevo concepto geométrico: el de concavidad, que Euclides no había necesitado si no que aparece un concepto de curva de superficie más general, no

limitado a las escasas líneas y superficies de los *Elementos*: rectas, circunferencia, plano, cono, cilindro y esfera; sino que incluye líneas y superficies cualesquiera que comprenden poligonales y hasta líneas formadas por rectas y curvas, así como las superficies correlativas.

Las definiciones 5 y 6 se refieren al sector esférico y al "rombo sólido", cuerpo que Arquímedes utiliza en muchas de sus demostraciones, constituido por dos conos de base y eje comunes y vértices en semiespacios distintos respecto de la base. Es interesante, por ejemplo, la proposición que en forma ingeniosa determina la diferencia de dos rombos sólidos de iguales ejes y vértices y de bases diferentes.

Con las primeras cuatro definiciones se relacionan los cinco postulados del escritos;

1º. La recta es la más corta de las líneas de igual extremo;
2º. En cuanto a las demás líneas planos con los mismos extremos, son desiguales cuando siendo cóncavas en la misma dirección una de ellas está totalmente comprendida entre otra y la recta con los mismos extremos o en parte está comprendida y en partes es común; y la línea comprendida es menor;
3º. Del mismo modo, cuando varias superficies tienen los mismos extremos y esos extremos están en un plano esa figura plana es la menor;
4º. Entre las superficies con los mismos extremos, cuyos extremos están en un plano, serán desiguales cuando siendo con todas cóncavas en la misma dirección una de ellas está totalmente comprendida entre otra y la figura plana con los mismos extremos, o está en parte comprendida y en parte en común; y la superficie comprendida es menor;
5º. Por otra parte, entre las líneas, superficies y sólidos desiguales la menor excede a la menor de una cantidad tal que agregada a sí misma puede superar a cualquier cantidad dada homogénea con las dos anteriores.

Los postulados 1º a 4º establecen las condiciones de desigualdad de ciertas líneas y de ciertas porciones de superficies, así como fija un principio de mínimo, que si bien son intuitivos y los

elementos habían demostrado en casos muy particulares, su demostración en el caso general planteado no era ni fácil ni posible con los recursos geométricos de la época, de ahí que darlos por omitidos en forma de postulado representa por parte de Arquímedes, tanto una genial intuición como un rasgo de audacia.

El postulado 1º tuvo mucha suerte. El hecho de postular para la recta una propiedad característica, intuitiva y de interpretación simple y única, unida a la necesidad instintiva (no lógica) de definir ese ente fundamental de la recta. El primer intento en ese sentido aparece en Teón de Esmirna, comentarista del siglo II.

Por su parte, el postulado 5º es el postulado que hoy se designa por antonomasia con el nombré de "postulado de Arquímedes", que Euclides había incluido entre las definiciones del Libro V de sus *Elementos*. Al admitirlo por primera vez entre los postulados, Arquímedes puso en evidencia que tal enunciado no era un principio, ni una definición, ni un teorema que podía deducirse de los demás postulados; de ahí que lo enuncie como un postulado independiente y haga uso de él en todos los numerosos teoremas de carácter infinitesimal que demuestra. Las actuales geometrías no arquimedianas, para las cuales son válidos los postulados ordinarios de las magnitudes con excepción del postulado de Arquímedes, constituyen una brillante confirmación del modo de ver de Arquímedes.

En el escrito *De los conoides y de los esferoides* se dan las definiciones de estos cuerpos engendrados por un movimiento de rotación de las tres secciones cónicas, que en tiempos de Arquímedes aún tenían los antiguos nombres dados por Menecmo y Aristeo.

Tales definiciones son:

1º. Una sección del cono rectángulo da una vuelta completa alrededor de su eje; la figura engendrada por esa sección se llama conoide rectángulo (es nuestro paraboloide de revolución);

2º. Si se tiene en un plano una sección del cono obtusángulo así como sus rectas más aproximadas y el plano da una vuelta completa alrededor del eje, las rectas más aproximadas describen un cono isósceles mientras que la figura engendrada por la sección se llama conoide

obtusángulo (las rectas más aproximadas son nuestras asíntotas y el conoide obtusángulo es el hiperboloide de revolución de dos hojas. En Arquímedes no hay alusión al hiperboloide de revolución de una hoja);

3º. si una sección del cono acutángulo da una vuelta completa alrededor de su eje mayor, la figura engendrada por esa sección se llama esferoide alargado, mientras que si gira alrededor de su eje menor, se llama esferoide aplanado (son nuestros elipsoides de revolución).

También mediante el movimiento se engendran las espirales, cuyas propiedades estudia en el escrito que lleva ese nombre. Así define Arquímedes sus espirales: Si en un plano se consideran una recta que mantiene uno de sus extremos fijo y gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, retomando sucesivamente la posición de donde ha partido, mientras que sobre la recta que gira se mueve uniformemente un punto a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.

Mientras que en las definiciones de los conoides y esferoides el tiempo no interviene para nada, pues el movimiento sólo se utiliza para la definición de los sólidos, en el caso de las espirales se hacen necesarias dos proposiciones iniciales para fijar la proporcionalidad entre los segmentos recorridos y los tiempos empleados en recorrerlos.

(2) Las sumatorias de Arquímedes. Las igualdades y desigualdades entre sumatorias que se presentan en los escritos de Arquímedes expresadas con lenguaje geométrico, son las siguientes, que por comodidad traducimos en lenguaje algebraico:

En *Cuadratura de la parábola* se da la suma de una progresión geométrica en la siguiente forma:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{r}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}$$

En *De las espirales*, así como en *De los conoides y de los esferoides*, expresa Arquímedes la suma de los primeros *n* cuadrados en la forma especial;

$$3\sum_{r=1}^{n} r^2 = n^2(n+1) + \sum_{o=1}^{n} r$$

mientras que en el escrito *De la esfera y del cilindro*, en los teoremas que permiten determinar el área de la esfera y del segmento esférico, Arquímedes demuestra un teorema de una sencillez extraordinaria que, expresado en forma algebraica, es:

$$2\sum_{r=1}^{n-1} sen\, r\alpha + sen\, n\alpha = (1 - \cos n\alpha) cotg \frac{1}{2}\alpha$$

expresión que al convertirse en integral definida mediante el paso al límite, permite hoy calcular esas áreas.

Además en *De las espirales* y en *De los conoides y de los esferoides,* Arquímedes utiliza las siguientes desigualdades:

$$2\sum_{r=1}^{n-1} r < n^2 < 2\sum_{r=1}^{n} r \;\; ; \;\; 3\sum_{r=1}^{n-1} r^2 < n^3 < 3\sum_{r=1}^{n} r^2$$

y si $A_r = arh + (rh)^2$, entonces

$$nA_n \; ; \; \sum_{r=1}^{n} A_r < (a + nh) \; ; \; \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}nh\right) < nA_n \; ; \; \sum_{r=1}^{n-1} A_r$$

(3) El escrito *De la esfera y del cilindro*. Además de las definiciones y postulados ya citados, en el primer libro de este escrito figura una serie de teoremas relativos a las áreas y a los volúmenes de los cuerpos redondos, de los cuales los más importantes son:

1º. La superficie lateral de un cilindro circular recto es equivalente a un circulo cuyo radio es medio proporcional entre la generatriz del cilindro y el diámetro de la base;

2º. la superficie lateral de un cono circular recto es equivalente a un círculo cuyo radio es medio proporcional entre la generatriz del cono y el radio de la base;

3º. la superficie lateral de un tronco de cono circular recto, de bases paralelas, es equivalente a un círculo cuyo radio es medio proporcional entre la generatriz del tronco de cono y la suma de los radios de las bases;

4º. la superficie de la esfera es equivalente a cuatro veces su círculo máximo;

5º. toda esfera es equivalente a cuatro veces el cono cuya base es un círculo máximo y cuya altura es el radio de la esfera.

En un corolario posterior Arquímedes demuestra que si se considera un cilindro de altura igual al diámetro de la base y en él se inscribe una esfera, las áreas y los volúmenes de esos dos sólidos están en la misma proporción simple 3:2. La sencillez de estos términos, que definen una razón igual, entre pares de magnitudes de distinta naturaleza, en contraste quizá con el esfuerzo realizado para obtenerla (área y volumen de la esfera) fue quizás el motivo que indujo a Arquímedes a expresar el deseo, que se cumplió, de grabar en su tumba una esfera con un cilindro circunscrito;

6º. la superficie de un casquete esférico, exceptuada la base, es equivalente a un círculo cuyo radio es el segmento trazado desde el vértice del casquete a un punto cualquiera de la base;

7º. el sector esférico es equivalente a un cono cuya base es equivalente a la superficie del casquete del sector y cuya altura es el radio de la esfera.

De los problemas, que con una serie de otras proposiciones comprende el libro II, sólo citamos aquellos que conducen a cuestiones no resolubles con regla y compás:

1º. Determinar una esfera equivalente a un cilindro o a un cono dado. Este problema se reduce a algún problema del mesolabio; en efecto, para resolverlo Arquímedes determina dos medias proporcionales entre dos segmentos dados, pero sin indicar el procedimiento seguido en esa determinación, lo que hace suponer que Arquímedes daba ese problema por conocido y resuelto;

2º. cortar una esfera por un plano de manera que los dos segmentos tengan sus volúmenes en una razón dada. El problema, como dice Arquímedes, se reduce a dividir el triple del radio de la esfera en dos partes tales que una de ellas sea a un segmento conocido como el cuadrado del diámetro de la esfera es el cuadrado de la otra parte. Arquímedes agrega que al final del libro dará la solución, que en este caso corresponde a un problema de trisección del ángulo, pero en ningún manuscrito se encuentra esa solución;

3º. determinar un segmento esférico de volumen dado y semejante a otro segmento también dado. Este problema se reduce al del mesolabio; en efecto, Arquímedes lo reduce a la búsqueda de dos medias proporcionales entre dos segmentos dados.

Terminemos agregando que en la penúltima proposición de este libro se habla de una razón "sesquilátera", es decir, multiplicada una vez y media para indicar nuestra potencia de exponente 3/2; mientras que en la última proposición se demuestra que entre todos los segmentos esféricos de igual superficie, el hemisferio es el de volumen máximo. (Estas dos últimas proposiciones del escrito son precisamente aquéllas, cuyo enunciado, que resultó erróneo, había enviado a los maestros alejandrinos sin que éstos advirtieran el error.)

(4) Los conoides y esferoides de Arquímedes. En el escrito *De los conoides y de los esferoides* Arquímedes, después de un largo preámbulo dirigido a Dositeo, donde figuran las definiciones de los términos que utilizará en el escrito, introduce algunos lemas aritméticos y propiedades de las cónicas que en algún caso enuncia sin demostrar agregando que esas demostraciones "se encuentran en los elementos sobre las cónicas", aludiendo indudablemente a escritos sobre ese tema existentes en su época, probablemente los de Euclides o de Aristeo.

Pasa luego a enunciar propiedades de los conoides y esferoides, para terminar con el objeto del escrito, que es expresar la equivalencia de segmentos de estos sólidos con sólidos conocidos. Así demuestra:

1º. Todo segmento de conoide rectángulo es equivalente a una vez y media el cono de igual base que el segmento y cuyo vértice es el punto dcl conoide de donde el plano tangente es paralelo a la base;

2º. la razón entre un segmento de conoide obtusángulo y el cono definido como en el caso anterior no es ahora constante, sino que es igual a la razón entre los dos segmentos de recta que se obtienen agregando al eje del segmento el triple y el doble, respectivamente, de la porción de recta "agregada", que según la terminología actual es la longitud del semidiámetro conjugado a la dirección determinada por la base del segmento de conoide;

3º. si un plano determina en un esferoide dos segmentos la razón entre uno de ellos y el cono, definido como siempre, es igual a la razón entre el eje correspondiente al otro segmento, agregándole la semirrecta que une los vértices, es decir, el semidiámetro conjugado a la dirección de la base, y ese eje.

Basta exponer estos enunciados para advertir la importancia de los resultados logrados por Arquímedes y la pericia técnica que en ellos despliega, si se considera que tales resultados se obtienen actualmente mediante los recursos del cálculo integral.

(5) Los poliedros semiregulares de Arquímedes. En el cuadro siguiente se enumeran los 13 poliedros semiregulares que se atribuyen a Arquímedes, con sus características: ángulos poliedros y aristas iguales entre sí; y caras polígonos regulares no todos semejantes.

Según un antiguo comentarista anónimo parece que estos poliedros pueden obtenerse partiendo de los regulares o de los mismos semiregulares seccionando los vértices con planos a la manera de los cristales. Por ejemplo, seccionando los vértices de un cubo de manera tal que sus aristas se bisequen, se obtiene el segundo de los semiregulares del cuadro.

Naturaleza y número de las caras		*Número y naturaleza de los vértices*	*Número de las aristas*
4 triág. y 4 hexág.	*= 8*	*12 áng. triedros*	*18*
8 triáng. y 6 cuadr.	*=14*	*12 " tetraedros*	*24*
6 cuadr. y 8 hexág.	*=14*	*24 " triedros*	*36*
8 triáng. y 6 octóg.	*=14*	*24 " triedros*	*36*
8 triáng. y 18 cuadr.	*=26*	*24 " tetraedros*	*48*
12 cuadr., 8 hexág., 6 octóg.	*=26*	*48 " triedros*	*72*
20 triáng. y 12 pentág.	*=32*	*30 " tetraedros*	*60*
12 pentág. Y 20 hexág.	*=32*	*60 " triedros*	*90*
20 triáng. y 12 decág.	*=32*	*60 " triedros*	*90*
32 triáng. y 6 cuadr.	*=38*	*24 " pentaedros*	*60*
20 triáng., 30 cuadr., 12 pentág.	*=62*	*60 " tetraedros*	*120*
30 cuadr., 20 hexág., 12 decág.	*=62*	*120 " triedros*	*180*
80 triáng. y 12 pentág.	*=92*	*60 " pentaedros*	*150*

(6) La espiral de Arquímedes. Enunciamos las propiedades más importantes de esta curva que Arquímedes demuestra en su escrito *De las espirales:*

1º. Mediante el trazado de la tangente a la espiral en uno de sus puntos puede obtenerse un segmento igual a la longitud de un arco de circunferencia de radio y ángulo central dado, es decir, que mediante esta curva se puede rectificar la circunferencia o uno de sus arcos;

2º. el área barrida por el radio vector en la primera revolución es la tercera parte del círculo, cuyo radio es la posición final del radio vector. Esa área barrida en la segunda revolución está en la razón 7:12 con el circulo cuyo radio es la posición final del radio vector. En un corolario Arquímedes da la

expresión general, en forma geométrica, de esta razón para una revolución cualquiera. Es fáci1 comprobar que esa razón es $[n^3-(n-1)^3]$; 3) también en forma bastante general expresa Arquímedes la razón de las áreas comprendidas entre las espirales engendradas en las revoluciones sucesivas con la porción de recta perteneciente a la posición inicial del radio vector; así como la razón en que queda dividido por el arco de espiral, el trapecio circular situado en el sector circular cuyos extremos corresponden a las posiciones inicial y final del arco de espiral y cuyos arcos de circunferencia bases son los que tienen por radios esos radios vectores.

(7) El número π de Arquímedes. Además del teorema que expresa la equivalencia del círculo con el triángulo de altura el radio y de base la circunferencia rectificada, el escrito *De la medida del círculo* contiene dos proposiciones, cuyo orden debería invertirse pues la primera es consecuencia de la siguiente. En efecto, la última proposición demuestra que la razón de la circunferencia al diámetro está comprendida entre $3^{10}/_{71}$ y $3^{1}/_{7}$ mientras que la anterior dice simplemente que la razón del círculo al cuadrado del diámetro es 11:14, que por supuesto es la cuarta parte del $3^{10}/_{71}$. En cambio, no menciona que es un valor aproximado por exceso, ni da el valor aproximado por defecto $^{223}/_{284}$ que habría obtenido del $3^{10}/_{71}$.

La extensa última proposición del escrito es uno de los teoremas más notables de Arquímedes, pues con los números $3^{10}/_{71}$ y $3^{1}/_{7}$ proporciona dos valores aproximados, por defecto y por exceso, de nuestro número π , que logra utilizando el método de inscribir y circunscribir polígonos duplicando el número de lados, partiendo del hexágono para llegar hasta el de 96 lados, y calculando aproximadamente sus perímetros, pero manteniendo el sentido del error.

Si se recuerda que, exceptuando el hexágono, todos esos polígonos tienen sus lados inconmensurables con el diámetro, tales perímetros están expresados mediante raíces cuadradas que Arquímedes calcula aproximadamente, por defecto o por exceso

según el caso, mediante reglas para obtener raíces aproximadas, seguramente conocidas en su época, pero de las cuales nada dice Arquímedes habiendo avanzado los historiadores de la matemática distintas conjeturas al respecto. El hecho es que Arquímedes llega a probar que nuestro número π está entre los valores ${}^{6336}/_{2017\,{}^{1}/_{4}}$ y ${}^{29376}/_{9347}$ que sustituye por los más cómodos $3\,{}^{10}/_{71}$ y $3\,{}^{1}/_{7}$, siendo este último valor muy utilizado como ${}^{22}/_{7}$ en la antigüedad y más adelante también.

Valores exactos	Valores aproximados de Arquímedes	
	Por defecto	Por exceso
$\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$	$\frac{265}{153} = 1{,}73202\ldots$	$\frac{1351}{780} = 1{,}732051\ldots$
$\sqrt{34950} = 591{,}14\ldots$	$591\frac{1}{8} = 591{,}125\ldots$	
$\sqrt{1373941\frac{33}{64}} = 1172{,}15\ldots$	$1172\frac{1}{8} = 1172{,}125$	
$\sqrt{5472132\frac{1}{16}} = 2339{,}26\ldots$	$2339\frac{1}{4} = 2339{,}25$	
$\sqrt{9082321} = 3013{,}68\ldots$		$3013\frac{3}{4} = 3013{,}75$
$\sqrt{3380929} = 1838{,}74\ldots$		$1838\frac{9}{11} = 1838{,}818\ldots$
$\sqrt{1018405} = 1009{,}165\ldots$		$1009\frac{1}{6} = 1009{,}166\ldots$
$\sqrt{4069284\frac{1}{36}} = 2017{,}24\ldots$		$2017\frac{1}{4} = 2017{,}25$
$\pi = 3{,}14159\ldots$	$3\frac{10}{71} = 3.1408\ldots$	$3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$

El cuadro que sigue da una idea de la notable aproximación de los valores de Arquímedes como puede comprobarse mediante las expresiones decimales que agregamos al respecto

(8) La cuadratura de la parábola. ”…ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura de un segmento limitado por una recta y una sección de cono rectangular, cosa que ahora nosotros hemos encontrado”, dice Arquímedes en el preámbulo dirigido a Dosileo que precede a su escrito *cuadratura de la parábola*, donde demuestra que el segmento de parábola excede en 1/3 al triángulo de igual base que el segmento y por vértice el del segmento, es decir, la intersección con el arco del diámetro de la parábola que pasa por el punto medio de la base. Además de exponer en el escrito numerosas propiedades de la parábola, demuestra la equivalencia por dos caminos: uno “mecánico” y el otro exclusivamente geométrico.

Resumamos ambos métodos. Sea el segmento de parábola de base AB y vértice V. Si se traza la tangente en A y el diámetro en B, se obtiene el triángulo ABC que, en virtud de la propiedad de la parábola $OV = VO'$, será cuádruple del triángulo $T = AVB$. Si se traza ahora un diámetro cualquiera NM que corta a AB en P, por las propiedades de la parábola se tendrá $AB : NB = NP$ o lo que es lo mismo $AB \cdot MN = NB : NP$; y es esta “igualdad de momentos” lo que llevó sin duda a Arquímedes a aplicar la “ley de la palanca” que había encontrado en sus estudios de estática. Parafraseando el proceso de Arquímedes diríamos que en una palanca de brazos iguales $AB = BH$, un peso proporcional a MN con su centro de gravedad en H, equilibra un peso proporcional a PN en su sitio. Utilizando dos escaloides inscriptos y circunscriptos al segmento y, por supuesto, por el método de exhaución, en definitiva Arquímedes demuestra que el segmento, con su centro de gravedad en H, equilibra el triángulo ABC y como éste tiene su centro de gravedad al tercio de BA, resultará que el segmento es un tercio de ABC y, por lo tanto, los $4/3$ de T.

La demostración geométrica consiste en llenar el segmento con el triángulo T, repetir la operación en los segmentos restantes de base AV y VB, luego en los de base VV' y así sucesivamente. Como se demuestra que cada operación llena ¼ del área llenada por la

operación anterior, al cabo de n operaciones el segmento se habrá llenado de una poligonal de área $T(1 + ¼ + (¼)^2 + \cdots + (¼)^{n-1})$ y en virtud del lema aritmético que le permitió obtener esta suma y con el método de exhaución, llega Arquímedes a demostrar que el segmento es equivalente a $^4/_3$ de T.

(9) El libro de los *lemas*. De las proposiciones de este libro, entre las que figura la trisección por inserción en la forma de una propiedad de la circunferencia, son interesantes algunas aplicaciones de álgebra geométrica a los círculos. Sea un semicírculo de diámetro AC y en éste un punto interior B; si se trazan los semicírculos de diámetros AB y BC, el recinto bordeado por los tres semicírculos que Arquímedes designa con el nombre de *arbelos* (lezna de zapatero) es equivalente al círculo de diámetro la semicuerda BD, perteneciente a la tangente común a los dos semicírculos anteriores. Arquímedes agrega algunas propiedades, en especial relativas a los círculos del interior del arbelos y tangentes a sus bordes, figuras que serán estudiadas más adelante por Pappus.

Otro recinto de contornos semicirculares es el *salinon* (palabra de discutible significado), obtenido partiendo de cuatro puntos A, B, C, D, tales que $AB = CD$ y dibujando en un semiplano los semicírculos de diámetros AD, AB, CD y en el otro de diámetro BC. Arquímedes, también muy fácilmente, demuestra que el recinto $ABCDA$ es equivalente al círculo de diámetro el segmento de eje de simetría de la figura comprendido entre los semicírculos de diámetros AD y BC.

La demostración no es sino una ingeniosa extensión a los círculos de la última identidad algebraica del segundo libro de los *Elementos*.

Cabe por lo demás observar que las equivalencias dadas por el *arbelos* y el *salinon* son casos muy particulares de la equivalencia entre recintos bordeados por cuatro semicircunferencias, dispuestas en forma especial, y un círculo cuyo diámetro es el segmento de eje radical de un par de esas circunferencias, comprendido entre los arcos de las otras dos. Puede observarse en los casos de Arquímedes cómo se verifica tal propiedad.

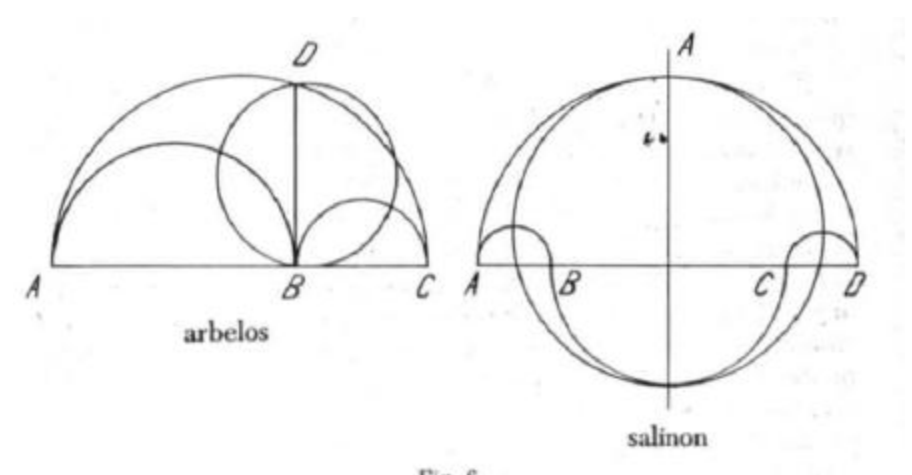


Fig. 6

(10) Las "*octadas*" de Arquímedes. Paro describir el sistema que adopta, a fin de dar nombre a números muy grandes, Arquímedes recuerda que tradicionalmente los griegos tenían esos nombres para los números hasta la miríada, es decir 10^4, de manera que podían "nombrar" números hasta la miríada de la miríada (10^8). Arquímedes adopta entonces este número como nueva unidad (llamémosla u) de primer orden del primer periodo, definiendo sucesivamente órdenes sucesivos hasta completar el orden u-simo y con el primer período $P = u^u$. A continuación define los períodos sucesivos, en cada uno de los cuales hay u órdenes, hasta llegar al periodo u-simo, es decir P^u, cuyo último número nombra: es "u unidades del orden u-simo del período u-simo", es decir, u^{u2} que con nuestras cifras seria la unidad seguida de ochenta billones de ceros. Da luego Arquímedes la regla para operar con los números de su sistema, regla que equivale a nuestra propiedad del producto de potencias de igual base (con la diferencia que Arquímedes opera con números ordinales, no cardinales), para luego pasar a la determinación efectiva del número de granos de arena del Universo.

Partiendo del hecho de que una semilla de amapola no contiene más de una miríada de granos de arena y que la semilla de amapola es una esfera de diámetro la 40-ava parte del dedo (10^{-4} parte del estadio), va calculando sucesivamente el número de granos de

arena que contienen las esferas de los siguientes diámetros: 100 dedos, 10^4 dedos, es decir, el estadio; 100 estadios, 10^4 estadios, 100 miríadas de estadios (que es el diámetro de la Tierra que adopta Arquímedes); u estadios; 100 u estadios (diámetro del Universo, según los astrónomos ortodoxos) y 10^6 u (diámetro del universo de Aristarco); llegando finalmente a que el número de granos de arena que llenarían este universo no superaría a un número que con nuestra notación es 10^{63}, o sea mil decallones.

(11) La ley de la palanca. El escrito *Del equilibrio de los planos* crea la teoría general de la palanca, fundada sobre la base de 7º postulados, con los que se abre su primer libro. No trae definiciones no obstante figurar en los postulados conceptos como el centro de gravedad, cuya definición no aparece en ninguno de los escritos conocidos de Arquímedes, circunstancia que hace pensar que esa definición ya era conocida en tiempos de Arquímedes o más verosímilmente, figuraba en otro escritos de Arquímedes hoy perdido.

En definitiva los siete postulados afirman:

1º. la unicidad del centro de gravedad;
2º. que el equilibrio se mantiene sustituyendo cuerpos equivalentes,
3º. que el equilibrio sólo depende de los pesos y de las distancias a las que los cuerpos están colocados respecto del centro de rotación; y
4º. que existe equilibrio en el caso particular de simetría completa de pesos y distancias, mientras que existe desequilibrio cuando no existe tal simetría.

De esos postulados deduce Arquímedes la conocida ley general de la palanca: "Dos pesos, conmensurables o no, se equilibran a distancias inversamente proporcionales a esos pesos".

Se ha objetado, en especial por Mach, que en realidad esta ley está implícita en las demostraciones de Arquímedes, pues de sus postulados que no traducen sino las experiencias e intuiciones que establecen las condiciones *cualitativas* del equilibrio, no es posible deducir una ley, como la de la palanca, que es *cuantitativa*.

De todos modos, obtenida la ley Arquímedes, en las restantes proposiciones del primer libro, determina el centro de gravedad de

los paralelogramos, triángulos y trapecios. En cambio, en el segundo libro, combinando los resultados anteriores con la cuadratura de la parábola llega a determinar el centro de gravedad de un segmento de parábola y de un trapecio parabólico, determinación esta última que constituye una de las aplicaciones más brillantes del "álgebra geométrica".

(12) El "principio de Arquímedes". En forma semejante al anterior está construido el escrito *De los cuerpos flotantes*. En el primer libro después de postular la naturaleza del fluido en la forma, postulamos que la naturaleza de fluido es tal que estando sus partes dispuestas en forma uniforme y continua, las partes menos comprimidas son desplazadas por aquellas que lo están más, mientras que cada parte está comprimida por el fluido situado encima de ella según la dirección de la vertical, salvo que ese fluido esté encerrado en alguna parte o esté comprimido por alguna otra cosa.

En virtud de este postulado y de las propiedades de la esfera Arquímedes demuestra que la forma de equilibrio que adopta un fluido es una esfera "cuyo centro es el mismo que el de la Tierra", y deduce las condiciones de equilibrio de los cuerpos sumergidos enunciando las siguientes proposiciones:

1º. Un cuerpo tan pesado como el fluido y abandonado en él, se sumerge hasta que ninguna parte de él emerja de la superficie, pero sin descender mayormente;

2º. un cuerpo menos pesado que el fluido no se sumergirá totalmente y abandonado en él, sino hasta que el volumen del fluido desalojado por la parte sumergida tenga igual peso que el de todo el cuerpo. Si ese cuerpo es sumergido forzadamente recibirá un empuje hacia arriba igual a la diferencia entre el peso del fluido desalojado y su propio peso; y

3º. un cuerpo más pesado que el fluido y abandonado en él se sumergirá hasta el fondo, y en el fluido el peso del cuerpo disminuirá de un peso igual al del fluido desalojado.

Estas proposiciones demuestran que en el equilibrio, de los cuerpos flotantes interviene una fuerza -el empuje- cuya intensidad está determinada mediante esas mismas proposiciones, pero de la

cual se desconoce su punto de aplicación, de ahí que Arquímedes introduzca, al finalizar el primer libro, un segundo postulado que se enuncia así en un fluido todos los cuerpos que se dirigen hacia arriba lo hacen según la vertical trazada por su centro de gravedad.

Con estos postulados y demostraciones Arquímedes, en el segundo libro del escrito, realiza una verdadera proeza científica al estudiar distintas condiciones de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución sumergido parcialmente en un fluido más pesado que él.

Es fácil advertir cómo la índole de este escrito contrasta con él carácter elemental del problema de la corona de Hierón y la bañera, que según la creencia popular habría dado origen al principio de Arquímedes. Según la conocida anécdota, tal como la reproduce Vitruvio, Arquímedes, para comprobar que la corona no era de oro puro sino mezcla de oro y plata había hecho confeccionar dos masas de oro y de plata de igual peso que la corona y habría medido el volumen de agua desalojado por cada uno de esos tres cuerpos: la corona y las dos masas. Bastaba verificar que el volumen desalojado por la corona estaba comprendido entre los otros dos volúmenes para comprobar el fraude. Por otra parte, también fácil le hubiera sido a Arquímedes calcular la proporción de oro y plata en la corona, pues se trata de un elemental problema de mezcla.

(13) El *método* de Arquímedes. La marcha del pensamiento de Arquímedes, en este original escrito, puede seguirse tomando una cualquiera de sus proposiciones, por ejemplo la determinación del volumen de un segmento esférico. La primera etapa es puramente geométrica; comparar secciones del cuerpo cuyo volumen se busca con secciones de cuerpos conocidos. En este caso, sea la circunferencia de diámetro $AB = 2r$ la sección diametral de la esfera y a la altura del segmento. Superpongamos a la esfera un cono rectángulo de vértice A y eje AB y un cilindro de base el área de la esfera y de altura la del segmento. Si los tres sólidos se cortan con un plano normal a AB a la distancia $AM' = x$ los radios $r_0 = M'M$; $r_2 = M'M_2$; $r_3 = M'M_3$ son tales que $r_0^2 = x(2r - x)$; $r_2 = x$; $r_3 = 2r$ y por tanto las secciones S, S_2, S_3 de la esfera, del cono y del cilindro estarán vinculadas por la relación $xS_3 = 2r(S +$

S_2). Obtenida en general una relación de este tipo se entra en la segunda etapa: es la etapa mecánica en la cual la relación anterior se concibe como una igualdad de momentos de una palanca introducida al efecto. En este caso basta tomar $HA = AB$ para establecer el equilibrio entre la sección del cilindro, en su sitio, y las secciones del cono y de la esfera con su centro de gravedad en H. Hasta aquí el proceso que sigue Arquímedes es riguroso y el resultado se funda en postulados y demostraciones conocidas. Es en la etapa que sigue, y final, donde aparece la particularidad del método "según el cual -como se expresa Arquímedes en la carta a Eratóstenes- será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo".

En esta tercera etapa, en el caso considerado, Arquímedes traslada las secciones de la esfera y del cono en H y apoyándose en la expresión, más bien vaga, de que esas secciones "llenan los sólidos" admite que esas secciones recomponen los sólidos en H, de ahí que ahora son la esfera y el cono, con su centro de gravedad en H, los sólidos que equilibran el cilindro en su sitio, de manera que entre los volúmenes V, V_2, V_3 del segmento, del cono y del cilindro, se verificará la relación $\frac{1}{2}aV_3 = 2r(V + V_2)$, recordando que el centro de gravedad del cilindro es el centro de simetría, expresión que le permitirá deducir V puesto que los volúmenes V_2, V_3 son conocidos. En realidad, en este caso, Arquímedes hace intervenir el cono de volumen V_1 de igual base y altura que el segmento, demostrando en definitiva que $V{:}V_1 = (3r - a){:}(2r - a)$.

Es evidente que la idea subyacente en la tercera etapa del proceso: los sólidos se componen de sus secciones, como en otras demostraciones: las figuras planas se componen de sus cuerdas, no tiene asidero alguno: ni matemático pues no se apoya en postulados, ni material pues viola la ley de la homogeneidad, ni

intuitivo ya que el procedimiento es inexperimentable. Y no obstante tantas incongruencias, el resultado es correcto.

La explicación de esta aparente paradoja debe verse en el proceso real, se trata de una integral definida y el resultado de tales integrales no depende sino de las funciones integrando, que son precisamente las secciones con las cuales opera Arquímedes en su absurdo proceso.

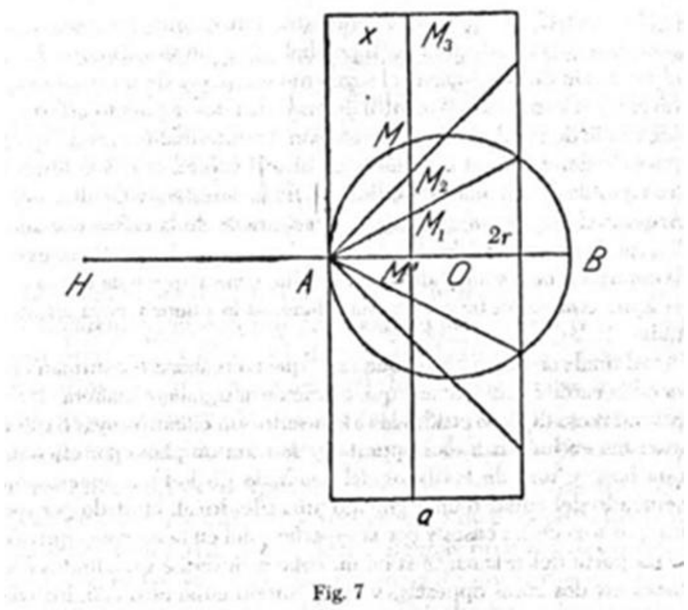


Fig. 7

Cuando se trata, con su *Método* de determinar centros de gravedad se dispone la palanca de manera que sea la figura cuya área o volumen se conoce y de la cual se busca el centro de gravedad, la que queda en su sitio.

En *Método*, Arquímedes demuestra, entre otras, las siguientes proposiciones: 1) Cuadratura de la parábola; 2) equivalencia entre la esfera, el esferoide de revolución, el segmento esférico y de un paraboloide de revolución con conos; 3) centro de gravedad del segmento esférico y del segmento de paraboloide de revolución. Es interesante agregar que, después de demostrar la equivalencia entre el volumen de la esfera y el de un cono de base igual al círculo máximo de la esfera y de altura el radio Arquímedes confiesa que llegó a la superficie de la esfera por analogía: "… pues así como todo círculo equivale al triángulo cuya base es igual a la

circunferencia y cuya altura es el radio, supuse que toda esfera equivale a un cono cuya base es la superficie de la esfera y cuya altura es el radio".

Al final considera las "cubaturas", que en realidad constituían el objeto de la carta a Eratóstenes, que define de la siguiente manera: 1) Si a un prisma recto de base cuadrada se le inscribe un cilindro cuyas bases están inscriptas en los cuadrados opuestos y se traza un plano por el centro de una base y uno de los lados del cuadrado de la base opuesta, queda separado del cilindro un segmento (uña cilíndrica), limitado por ese plano, por una de las bases y por la superficie del cilindro, que equivale a la sexta parte del prisma; 2) si en un cubo se inscribe un cilindro con sus bases en dos caras opuestas, y en el mismo cubo otro cilindro con sus bases en otro par de caras opuestas, el sólido comprendido entre ambos cilindros y común a ambos: la doble bóveda cilíndrica, equivale a los dos tercios del cubo. De la uña cilíndrica Arquímedes aporta demostraciones geométricas y mecánicas, mientras que la parte relativa a la doble bóveda cilíndrica no aparece en el único ejemplar, mutilado y deteriorado, del Método que se conoce; aunque no fue difícil reconstruir las demostraciones pertinentes.

Además, en el transcurso del escrito, Arquímedes señala cómo podrían demostrarse de la misma manera otras proposiciones semejantes que enumera, agregando todavía que deja muchas proposiciones expresamente de lado y otras que, como expresa en la carta "a mí no se me han ocurrido todavía, pero supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores podrán encontrar".

Apolonio de Perga

El tercero, cronológicamente, de los grandes matemáticos griegos de la edad de oro, es Apolonio de Perga de cuya vida se tienen escasas noticias y no siempre de fácil identificación, dada la gran cantidad de Apolonios que figuran en la historia griega.

Se sabe que estudió en Alejandría, donde probablemente también enseñó y que residió en Éfeso y en Pérgamo, ciudad está

última que constituyó otro de los centros culturales del mundo griego. De todos modos debe considerarse posterior a Arquímedes ubicándose su florecimiento a fines del siglo II a. C. o comienzos del III.

Así como el nombre de Euclides está indisolublemente ligado a sus *Elementos*, el nombre de Apolonio lo está con el de *Cónicas*, su escrito más famoso y de cuyos ocho libros se poseen: los cuatro primeros en su texto original, los tres siguientes mediante traducciones árabes y el último, totalmente perdido, por noticias de Pappus y una reconstrucción parcial del astrónomo Halley.

En el libro primero Apolonio define en general las superficies cónicas de directriz circular y vértice un punto no perteneciente al plano de la directriz, y demuestra algunas propiedades de estas superficies, entre las cuales la existencia de dos series de secciones circulares en los conos oblicuos. Estudia luego los tres tipos de secciones que se obtienen cortando el cono con un plano que no pase por el vértice e introduce los actuales nombres: parábola, elipse e hipérbola. (1) Apolonio sigue denominando hipérbola a una de las dos ramas de esta curva, denominando secciones opuestas a esas dos ramas. En cambio, introduce el concepto de pares de hipérbolas conjugadas para nuestro par de hipérbolas de iguales asíntotas y ejes.

De los ocho libros, cuyo contenido resume Apolonio en la introducción al libro primero dedicado a un Eudemo de Pérgamo (2), los primeros cuatro abarcan la teoría general de las cónicas y sus propiedades más importantes, completando en este campo la obra de Arquímedes. Tal carácter de esos libros explica quizá que sean los únicos sobrevivientes en su texto original. En cambio, los libros siguientes se refieren a propiedades especiales y deben considerarse más bien como monografías. (3)

Los tres primeros libros de Cónicas están dedicados a Eudemo, los restantes, pues Eudemo había muerto, a un Atalo, también de Pérgamo.

Algunas indicaciones que aparecen en las introducciones a los dos primeros libros, pueden dar alguna idea de cómo se trasmitían los conocimientos en su época. Así dice Apolonio a Eudemo en la introducción al libro segundo: "He puesto en manos de mi hijo Apolonio el libro II de *Cónicas* que he escrito para que te lo

entregue. Léelo con cuidado y comunícaselo a quien se interese por él. Hazlo conocer también al geómetra Filónides que te he presentado en Éfeso, si por casualidad llega a Pérgamo".

Además de *Cónicas*, su obra máxima y a la que debe su fama de gran matemático, se conoce de Apolonio en versión árabe un problema de segundo grado con su solución: *Sobre las secciones de razón*, que consiste en determinar por un punto fijo una recta que al cortar dos transversales determina sobre éstas segmentos, a partir de puntos dados, de razón también dada.

Además, por comentaristas posteriores en especial Pappus, se atribuyen a Apolonio otros escritos matemáticos: 1) un grupo de problemas semejante al anterior: *Sobre las secciones determinadas; Sobre las secciones de áreas;* 2) un segundo grupo de problemas, vinculados en general con los lugares geométricos. Cabe recordar que los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres tipos: lugares planos, que se resolvían con rectas y circunferencias; lugares sólidos, que se resolvían mediante cónicas; y lugares lineales, que exigían otras líneas para su solución. Entre los escritos atribuidos a Apolonio y vinculados con los lugares, figuran: uno *Sobre los lugares planos* con distintos problemas; otro denominado *De las inclinaciones*, con problemas de inserción y un tercero *Sobre los contactos*, donde se estudian muchos casos particulares de un problema que, generalizado, toma el nombre de "problema de Apolonio" y que consiste en determinar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas; 3) se atribuyen también a Apolonio escritos sobre los temas: *Elementos de Euclides*, sobre los poliedros regulares, la cuadratura del círculo, sobre el problema de Delos (4) y sobre sistemas de numeración.

Agreguemos, por último, que de atenerse al testimonio del astrónomo Ptolomeo, Apolonio no sólo fue un gran matemático sino también un gran astrónomo, ya que le atribuye proposiciones de índole astronómica en las que Apolonio utiliza la teoría de los epiciclos y de las excéntricas, de la cual sería el inventor, que en manos de Hiparco y de Ptolomeo mismo se convertirían en las bases de la astronomía antigua.

Notas complementarias

(1) Generación y nombre de las cónicas, según Apolonio. Dejando de lado el caso particular en el cual el plano secante es paralelo al plano de la directriz y, por tanto, la sección cónica es una circunferencia semejante a la directriz; en todos los demás casos Apolonio considera un plano diametral constituido por el eje de la superficie cónica: recta que une el vértice con el centro de la directriz, y la recta AB del plano de la directriz normal a la intersección PQ de este plano con el plano secante. Si $V'N$ es la intersección del plano secante con el diametral, Apolonio demuestra que las secciones cónicas serán diferentes según que la recta $VN' \,//\, V'N$, del plano diametral, sea interior, exterior o pertenezca a la superficie.

Para eso sea $A'B'$ el diámetro de una sección circular cualquiera de un plano paralelo al plano de la directriz y sea N'' la intersección de $A'B'$ con el plano secante. Si se indica con y la ordenada común de la circunferencia y de la sección cónica $N''P'$ y $N''Q'$, y con $x = V'N''$ la abscisa correspondiente de la sección cónica tendremos, en todos los casos, llamando por comodidad

$$A'N'' = x_1;\ N''B' = x_2;\ AN' = n\ ;\ VN' = m\ ;\ y^2 = x_1x_2 = nxx_2 : m$$

Consideremos como primer caso que la paralela VN' coincida con la generatriz VB; x_2 es constante y si se indica con $2\,p = V'R$ el segmento cuarto proporcional entre n, m y x_2, que Apolonio designa *como lado recto*, se tendrá $y^2 = 2px$, expresión analítica que en forma geométrica Apolonio designa como "síntoma" de la curva y que no es sino la ecuación de la misma en coordenadas cartesianas oblicuas, tomando como ejes un diámetro y la tangente paralela a su dirección conjugada. Por otro lado, es claro que el cuadrado del lado y es equivalente al rectángulo de lado x aplicado al segmento $2p$, de ahí que los puntos de la cónica pueden obtenerse, sin salirse de su plano, resolviendo para cada punto del problema de aplicación simple (parábola) de áreas, de ahí el

nombre con el cual Apolonio bautiza la curva y nombre con el cual hoy se la conoce.

Si en cambio VN' es interior a la superficie, Apolonio da al segmento fijo $V'V'' = 2a$ el nombre de *lado transverso* e introduciendo un segmento p tal que la razón $p: a$ sea igual a la razón mn’: m^2, y llega al "síntoma" de la nueva curva

$$y^2 = \frac{p}{a}x(2a + x) \text{ o lo que es lo mismo } y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

En este caso el cuadrado construido sobre el lado y es equivalente a un rectángulo de altura x aplicado al segmento fijo $2p$, al cual hay que agregarle otro rectángulo de igual altura y semejante a un rectángulo dado, de lados proporcionales a p y *aa*. Es decir, que x se obtiene resolviendo un problema de aplicación de áreas por exceso, por *hipérbole*, de ahí el nombre de hipérbola con el cual desde Apolonio se ha bautizado la curva.

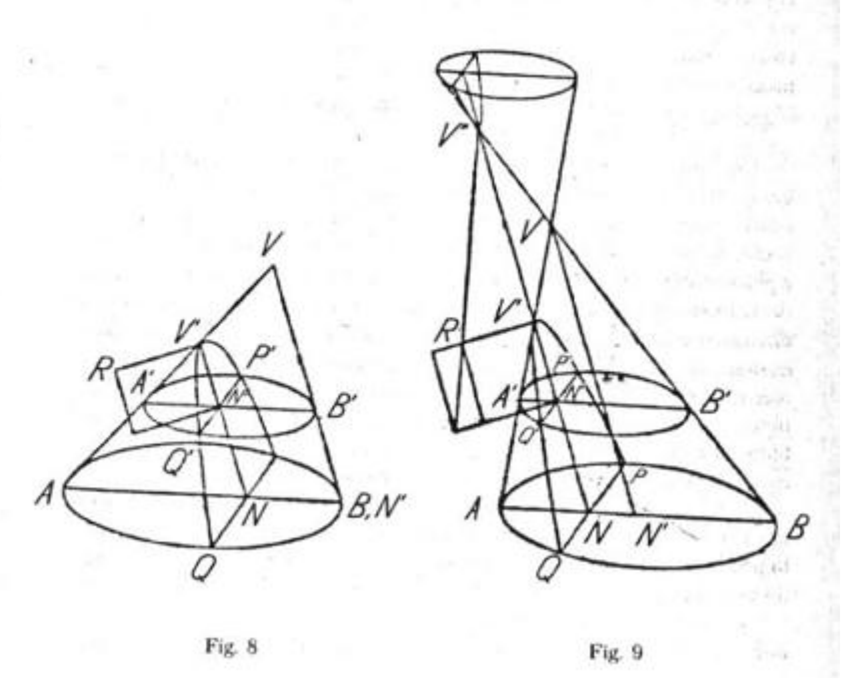


Fig. 8 Fig. 9

Por último, si VN' es exterior a la superficie las mismas notaciones dan como "síntoma" de la curva

$$y^2 = \frac{p}{a}x(2a - x) = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

y en este caso el problema de aplicación de áreas es por defecto, por *elipse*, de ahí el nombre de la curva.

Por supuesto que Apolonio reconoce que si el plano diametral *y* secante son normales entre sí, los ejes de referencia son los ejes de la cónica.

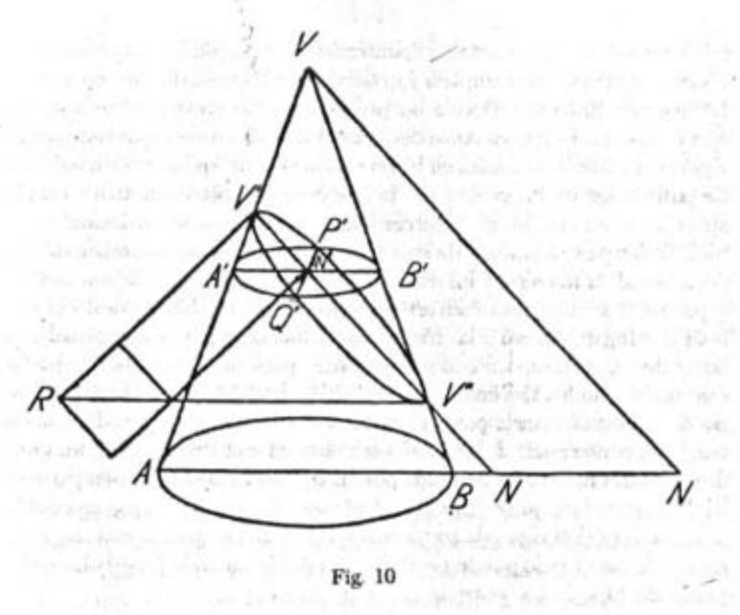


Fig. 10

(2) Resumen del contenido de los ocho libros de *Cónicas*. He aquí la introducción al libro primero de *Cónicas*: Apolonio a Eudemo, salud. Si gozas de buena salud y en lo demás las cosas salen a la medida de tus deseos, muy bien está; para mí las cosas también marchan pasablemente bien. Durante el tiempo que estuve contigo en Pérgamo advertí tu anhelo para conocer mi obra sobre las cónicas; te remito, por lo tanto, el primer libro corregido y te remitiré los restantes libros cuando los termine según mis deseos. Me atrevo a decir que no habrás olvidado, según te conté, que emprendí la investigación de ese lema a requerimiento de Naucrates, el geómetra, quien así me lo pidió cuando vino a Alejandría y se detuvo conmigo. Compuse la obra en ocho libros y se los entregué en seguida y con toda premura pues estaba a punto de embarcarse, por tanto, no los había revisado bien; y en verdad

había puesto por escrito todo cuanto se me ocurría, dejando para más adelante su revisión. En consecuencia ahora público, en la medida en que se me presente la ocasión, las partes corregidas de la obra. Como ha ocurrido que en el intervalo algunas otras personas con quienes me he encontrado han visto también el primero y segundo libros antes de ser corregidos, no haz de sorprenderte si los encuentras en distinta forma de los que conoces.

Ahora bien, de los ocho libros, los cuatro primeros forman una introducción elemental. El primero contiene la generación de las tres secciones y de las ramas opuestas, exponiéndose las propiedades fundamentales en una forma más completa y general que en los escritos de los demás. El segundo libro se refiere a las propiedades de los diámetros y de los ejes de las secciones, así como de las asíntotas, con otras cosas necesarias, y generalmente empleadas en la determinación de los límites y condición de posibilidad de los problemas; lo que entiendo por diámetros y ejes lo aprenderás en este libro. El tercer libro contiene muchos teoremas notables, útiles para la síntesis de los lugares sólidos y para las condiciones de posibilidad; la mayoría y los más hermosos de estos teoremas son nuevos y por su descubrimiento advertí que Euclides no había expuesto la síntesis del lugar relativo a las tres o cuatro líneas, sino por casualidad una parte de ella y tampoco con mucho éxito, pues no es posible completar esa síntesis sin los teoremas que he descubierto. El cuarto libro demuestra de cuántas maneras pueden cortarse entre sí las secciones de conos o con la circunferencia del círculo; contiene, además, otras cosas, ninguna de las cuales había sido discutida por los escritores anteriores, en particular las cuestiones que se refieren al número de puntos en que una doble rama de hipérbolas pueda cortar una sección de un cono, o una circunferencia de un circulo pueden cortar a una doble rama de hipérbolas o dos ramas de hipérbolas, entre sí.

Los restantes libros son más elevados; uno de ellos trata algo extensamente de máximos y mínimos; otro, de secciones de cono iguales o semejantes; otro, de teoremas de la naturaleza de la determinación de límites y el último de determinados problemas de cónicas. Pero, por supuesto, cuando todos se publiquen, quienes

los lean, podrán formularse su propio juicio acerca de ellos, de acuerdo con su gusto individual. Adiós."

(3) Propiedades de las cónicas, según Apolonio. En el libro primero las propiedades de las cónicas que Apolonio demuestra se refieren a la posición relativa de una recta respecto de ellas y de ahí la construcción de la tangente en un punto mediante la propiedad que en lenguaje actual expresa que la tangente y la secante que pasan por un punto separan armónicamente los extremos del diámetro conjugado a la dirección de la secante. El libro se cierra con teoremas en cierto modo recíprocos de los teoremas iniciales, es decir: dada una cónica, existe siempre un cono de sección circular del cual esa cónica es una sección plana.

El libro segundo está dedicado en general a la hipérbola y sus asíntotas y, por tanto, a las secciones opuestas y a las opuestas conjugadas. Aparece la propiedad del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas bisecado por el punto de tangencia, y la constancia del paralelogramo de lados las asíntotas y vértices opuestos el centro y un punto cualquiera de la hipérbola.

En el libro tercero se estudian propiedades relativas a los triángulos y cuadriláteros inscritos y circunscritos, y es probable que sean éstas las propiedades que Apolonio utilizó para estudiar, como lo afirma en la introducción al libro primero, los "problemas de las tres rectas y de las cuatro rectas" que más tarde aparecerán en Pappus y desempeñarán un papel histórico en el advenimiento de la geometría analítica. En este tercer libro aparecen los polos y polares de las cónicas, así como los focos de la elipse y de la hipérbola y las conocidas propiedades focales de estas curvas. No menciona el foco de la parábola que sin duda conoció, aunque no habrá deducido de él propiedades interesantes. En cambio, no deja de llamar la atención que Apolonio no aluda para nada a las directrices de las cónicas. Finaliza el libro con algunas propiedades métricas que hoy se estudian con los recursos de la geometría proyectiva.

El cuarto libro está dedicado a las intersecciones y contactos de las cónicas con circunferencias o de las cónicas entre sí, demostrando que dos cónicas no pueden más de cuatro puntos comunes.

El libro quinto es uno de los libros que más han contribuido a elevar la fama de Apolonio como geómetra. Se estudian en él las distancias máximas y mínimas de un punto a los puntos de una cónica en su plano, estudio que involucra la teoría de las normales a una cónica que pasan por un punto dado, teoría vinculada con la determinación de las actuales evolutas. Apolonio resuelve el problema demostrando que los pies de las normales que pasan por un punto fijo están sobre una hipérbola, hoy llamada "hipérbola de Apolonio", cuya intersección con la cónica resuelve el problema. En realidad, cuando la cónica es una parábola esos puntos se encuentran también sobre una circunferencia, circunstancia que no advirtió Apolonio y que le reprochará más tarde Pappus por haber resuelto como lugar sólido un problema que podía haberse resuello como lugar plano.

El libro siguiente, menos importante, se refiere a la congruencia y semejanza de las cónicas y, como lo manifiesta el mismo Apolonio, su objeto era aclarar y completar trabajos de sus antecesores, refiriéndose probablemente a estudios de Arquímedes en el tratado sobre los conoides y esferoides.

El libro séptimo vuelve a tratar asuntos originales, al estudiar los máximos y mínimos de ciertas funciones de los diámetros de las cónicas. Es en este libro donde aparecen los hoy llamados "dos teoremas de Apolonio", relativos a la constancia de la suma (para la elipse) o la diferencia (para la hipérbola) de los cuadrados construidos sobre un par de diámetros conjugados y a la constancia del paralelogramo construido sobre un par de diámetros conjugados.

(4) La solución de Apolonio del problema de Delos. Esta solución es muy simple. Sea un rectángulo $OADB$ de centro C de lados $OA = a$; $OB = b$; si por D se determina una recta tal que sus intersecciones X e Y, respectivamente, con las prolongaciones de A OA y OB cumplen la condición $CX = CY$, las distancias $AX = x$ y $BY = y$ resuelven el problema. En efecto, por semejanza de triángulos

$$b : x = y : a = (b + y) : (a + x);$$

por la condición de equidistancia $x (x + a) = y (y + b)$ expresión que, combinada con las igualdades anteriores, da $b : x = x : y = y : b$, por tanto x e y son medias proporcionales entre b y a.

Los epígonos del siglo de oro

Además de los "tres grandes" de Hipsicles, ya mencionado, pueden citarse algunos otros matemáticos del período helenístico. Contemporáneo de Arquímedes, aunque algo más joven, es Eratóstenes de Cirene, sabio de actividad múltiple que fue bibliotecario de Alejandría y cuya hazaña científica más notable es la primera medida de la circunferencia terrestre. En matemática, donde no descolló tanto como en geografía, se le conocen tres contribuciones: una resolución del problema de Delos, interesante porque con ella dio la historia del problema y los intentos realizados por sus predecesores;(1) un escrito *Sobre las proporciones* donde se ocupa de las distintas "medias"; y su conocida "criba", que ofrece un procedimiento para construir una tabla de números primos.

Entre Arquímedes y Apolonio se sitúa Nicomedes, a quien se debe una curva: la "concoide" de Nicomedes y un instrumento para trazarla, con la cual se pueden resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo. (2)

Otra solución al problema de Delos la ofreció un matemático posiblemente contemporáneo del anterior: Diocles, quien determinó las dos medias proporcionales mediante una curva que tomó el nombre de "cisoide" (de kissos=hiedra) por la forma semejante a una hoja de hiedra que adopta la figura limitada por un arco de esa curva y una semicircunferencia. (3) A Diocles se atribuye también una solución del problema de Arquímedes, dividir una esfera en dos segmentos cuyos volúmenes están en una razón dada, mediante cónicas (elipse e hipérbola), mientras que una solución análoga, mediante parábola e hipérbola, se atribuye a Dionisiadoro de Amiso, probablemente del s. I a. C.

De otros matemáticos de este período se dispone de escasos datos acerca de las personas, y sólo algunas referencias de sus escritos proporcionadas por comentaristas posteriores.

El más original es Zenodoro, algo posterior a Arquímedes a quien cita, que introduce en la geometría antigua un nuevo

problema: el de los isoperímetros, que resuelve en casos particulares: el círculo es de mayor área que cualquier polígono regular de igual perímetro que la circunferencia del círculo; que la esfera es de mayor volumen que cualquier sólido de igual superficie...

Cabe citar a Perseo, que habría estudiado las curvas llamadas "espíricas", por ser secciones con planos paralelos al eje de rotación de superficies tóricas, que los antiguos denominaban espiras o anillos.

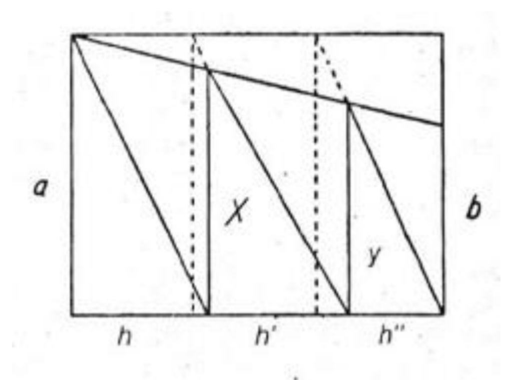
Citemos, por último, algunas figuras, no exclusivamente geómetras: el astrónomo Hiparco de Nicea, predecesor de Ptolomeo, a quien se atribuyen contribuciones matemáticas que más tarde desarrollará Ptolomeo; Teodosio de Bitinia, también astrónomo, autor de una *Esférica*, más bien elemental, que es el tratado más antiguo sobre el tema que ha sobrevivido; Gemino de Rodas, quien se ocupó de astronomía, aunque de mayor interés es una introducción a la matemática, de la cual se conservan fragmentos, donde trata cuestiones vinculadas con los fundamentos y la clasificación de la matemática.

Notas complementarias

(1) El mesolabio. Es con este nombre que Pappus designó al instrumento que Eratóstenes acompañó a la solución del problema de intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados. Se componía de tres marcos rectangulares iguales, provisto cada uno de sus diagonales. Esos marcos podían deslizarse: el primero sobre el segundo, el tercero debajo del segundo; si se realizaba ese desplazamiento de manera tal que los extremos visibles de las diagonales aparecieran alineados, los montantes de los marcos estaban en proporción continua y por tanto resolvían el problema del mesolabio. En efecto si a, x, y, b son los montantes y h, h', h'' las bases de los marcos; de las dos ternas de triángulos semejantes se deduce

$$a : b = a : h = x : h' = y : h'' \quad ; \quad x : h = y : h' = b : h''$$

De donde $\quad a : x = x : y = y : b.$



(2) La concoide de Nicomedes. Dado un punto fijo P (polo) y una recta fija b (base) que no le pertenece, la concoide es la curva, en forma de concha (de allí su nombre), lugar de los puntos de las rectas que pasan por P, tales que sus distancias a la intersección con la base es un segmento constante dado. La curva comprende dos ramas, situadas en ambos semiplanos separados por la recta, aunque Nicomedes no considera sino la rama situada en el semiplano que no contiene P.

Para trisecar, por ejemplo, el ángulo (agudo) en P del triángulo rectángulo OPR bastará construir la concoide de polo P, base OR y distancia constante el doble de PR. El punto M de la concoide situado sobre RM, normal a OR, unido con P, determina el ángulo MPO tercio del dado. Para comprobarlo basta tomar $MS = SR = PR$.

La solución del problema de la duplicación del cubo, mediante la concoide es menos simple. Algo simplificada consiste en lo siguiente. Sea el triángulo rectángulo OPA, cuya hipotenusa PA y cateto OA sean, respectivamente las mitades de los segmentos b y a entre los que deben intercalarse dos medias proporcionales. Si se toma $AA' = 2a$ y se traen por A la paralela AR a $A'P$, la concoide de polo P, base AR y distancia AP resuelve el problema, pues si M es la intersección de esa concoide con AA' tendremos que uniendo P con M y llamando $PR = x; AM = y$, los triángulos semejantes $MA'P$ y MAR dan $a : x = y : b$. Comparando luego el valor del cateto OP, deducido

de los triángulos OPA y OMP, se llega a $x (x + b) = y (y + a)$, se tendrá por tanto

$$a : x = y : b = (a + y) : (x + b) = x : y$$

de donde los segmentos x e y son medios proporcionales entre $2a$ y b.

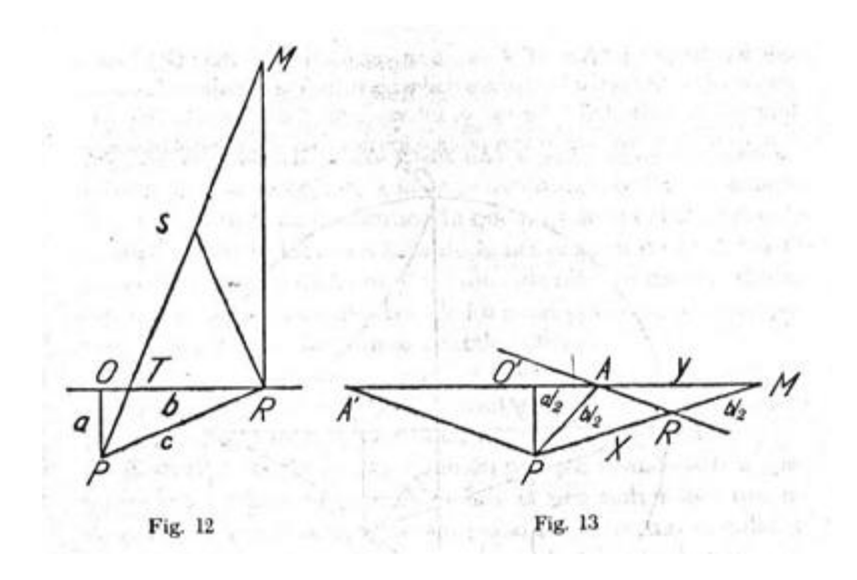


Fig. 12 Fig. 13

(3) La cisoide de Diocles. Sea una circunferencia de centro O, diámetros perpendiculares AB y $O'O''$ y dos semicuerdas MM' y NN' simétricas respecto de $O'O''$ y normales a AB. La intersección P de AM' con NN' es un punto de la cisoide que se obtiene haciendo variar la pareja de semicuerdas. La rama de la curva $O''AO'$, situada dentro del círculo, con la semicircunferencia $O''BO'$ dibuja la hoja de hiedra. La proporcionalidad $AM : MM' = AN : NP$ puede escribirse $AN : NP = BN : NN'$, razón esta última igual a $NN' : An$, de manera que combinando esas razones resulta $BN : NN' = NN' ; AN = AN : NP$ y por tanto NN' y AN son medias proporcionales entre BN y NP. Como a su vez $BN : NP = BO : OQ$ bastará tomar BO y OQ como segmentos dados, construir la cisoide en la circunferencia de radio OB y buscar su intersección P con la recta BQ, para tener en AN y NN' segmentos proporcionales a las dos medias buscadas.

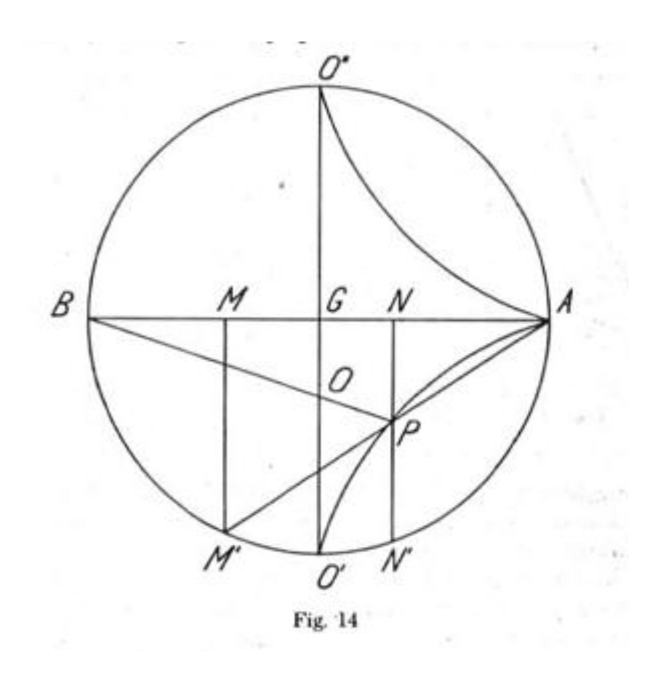


Fig. 14

La matemática griega

Ya dijimos que el primer siglo helenístico fue la edad de oro de la matemática griega; es con los "tres grandes" que esa ciencia culmina, mostrando así más claramente sus características: unas permanentes, otras más vinculadas con el propio mundo griego.

La primera nota permanente que los griegos aportaron a la matemática fue distinguir un determinado conjunto de conocimientos, confiriéndole, mediante el método axiomático y la demostración, los caracteres de una ciencia deductiva o, mejor, haciendo de él el modelo de toda ciencia deductiva.

La segunda nota matemática permanente que aportan los griegos es la abstracción, aunque la abstracción de la matemática griega tiene rasgos propios, conferidos por el pitagorismo que la vio nacer, por el platonismo en cuyo seno se desarrolló, sin olvidar los factores técnicos (piénsese en el "escándalo de los irracionales") que influyeron en el curso de ese desarrollo. La abstracción de la matemática griega es una especie de abstracción de primer grado, semejante a la abstracción de las ciencias

naturales, muy distinta de la abstracción que introducirá el álgebra o de la abstracción quintaesenciada de la matemática de hoy. Las figuras de la matemática griega no son entes abstractos muy distintos de los elementos químicos, de los gases perfectos, de las especies biológicas, de las formas cristalográficas...

Este tipo de abstracción explica el imperialismo de la geometría que se advierte en la matemática griega, apegada a los cuerpos naturales, una matemática de figuras, visual, táctil.

Esta abstracción explica también por qué la matemática griega no logra grandes generalizaciones: es una matemática que no va a la caza de métodos generales, sino de problemas singulares, aunque a veces las nociones previas que la solución de tales problemas singulares son tantas y tan complejas que de por sí esas nociones pueden llegar a constituir un sistema, como ocurre con los *Elementos*.

Esta predilección por el problema, despreocupándose por la generalización, impidió ver el proceso y la continuidad, con la noción anexa de variabilidad. Los problemas de máximo y mínimo que estudian los griegos no son momentos especiales de un proceso continuo, sino casos particulares, fijos, que revelan una propiedad también particular, fija, que revela otra característica específica de la matemática griega: su estatismo, su carácter más estático que dinámico, más cinemática que cinético. En los contados momentos que en ella aparece el movimiento, es un movimiento pobre, diríase sin fuerza: es el movimiento uniforme rectilíneo o circular.

Otra característica que distingue claramente la matemática griega de la moderna y actual, proviene de la influencia del platonismo que arrojó los objetos matemáticos en un trasmundo, lejos de todo contacto y vinculación posibles con este mundo sublunar de los hombres y de las cosas.

De ahí el destierro al que se condenó la logística y toda aplicación práctica; de ahí la naturaleza especial de la vinculación de la matemática griega con ciertos campos de la ciencia natural: astronomía, óptica, estática, campos que los griegos consideraron que pertenecían a la matemática con igual derecho que la aritmética y la geometría; de ahí que de ellas no estudiaron sino su esqueleto geométrico y de ninguna manera su estructura física.

Baste pensar en la astronomía griega, de la cual nada ha quedado, o en la palanca de Arquímedes de la que sólo cuelgan polígonos y segmentos de parábola, o en su fluido ideal, donde no flotan embarcaciones sino segmentos de paraboloides de revolución.

EL PERÍODO GRECORROMANO

Epígonos y comentaristas

En el mundo grecorromano de los primeros siglos cristianos, la matemática conserva las características de los dos siglos anteriores, siendo, en general, sus representantes epígonos y comentaristas de los grandes matemáticos griegos. Hacen excepción Pappus de Alejandría, matemático original; Claudio Ptolomeo, más astrónomo que matemático, y Diofanto que, con Herón alejandrino, forma una pareja de matemáticos algo heterodoxos, que hoy se vinculan preferentemente con la matemática de los babilonios.

La serie de los matemáticos de este período se abre con Nicómaco de Cerasa, de fines del siglo I o comienzos del II, sin duda un neopitagórico, pues Pappus lo designa "el pitagórico". De sus obras, la más conocida es una *Introducción aritmética* de escaso valor científico, pues en ella las demostraciones se sustituyen por el examen de casos particulares, pero interesante pues hace conocer el no muy extenso saber aritmético de los griegos anteriores. Por otra parte, esta obra se convirtió en el texto de aritmética durante la Edad Media, gracias a la versión latina que de ella compuso Boecio. La Introducción de Nicómaco se compone de dos libros que se ocupan de progresiones aritméticas, números figurados, proporciones, etcétera. (l)

Contemporáneo del anterior es Menelao de Alejandría, matemático y astrónomo, que hizo observaciones en Roma en 98 y autor de una *Esférica* en tres libros, que ha llegado hasta nosotros en versiones árabes y hebreas y que representa la culminación de esta rama de la geometría. Con la *Esférica* de Menelao hace su aparición el triángulo esférico, del cual Menelao da las propiedades más importantes, siguiendo un camino semejante al recorrido por Euclides al estudiar los triángulos planos, pero mostrando tanto las analogías como las diferencias entre ambas clases de triángulos. Entre las primeras figuras el hoy llamado "teorema de Menelao"

que es válido tanto para los triángulos planos como para los esféricos, sin más que cambiar en estos últimos la expresión "semicuerdas del arco doble" (nuestros senos actuales) por los segmentos de los triángulos planos.(2)

Del siglo II es Teón de Esmirna que, además de ocuparse de astronomía y de geometría, en un escrito *Sobre los conocimientos matemáticos útiles para la lectura de Platón* trata cuestiones aritméticas a la manera de Nicómaco, sin demostraciones y enunciando las proposiciones con ejemplos numéricos. Algunas de esas cuestiones, no tratadas por Nicómaco, conservan cierto interés aritmético. (3)

Hay que dejar transcurrir un par de siglos para dar con otro Teón matemático, ahora de Alejandría, importante por haber editado y comentado los *Elementos* de Euclides, así como por sus comentarios al *Almagesto* de Ptolomeo y por sus noticias sobre la logística griega. Con Teón de Alejandría se vincula su hija Hipatía, también matemática, que habría colaborado con el padre en los comentarios del *Almagesto* y ocupado además de las *Cónicas* de Apolonio. Pero el nombre de Hipatía tiene una connotación histórica trágica: su muerte en manos de la turba durante las luchas entre paganos y cristianos.

Con Hipatía puede decirse que la matemática deja de cultivarse en Alejandría. Aun, por un pequeño lapso, encuentra albergue en el seno del neoplatonismo, uno de cuyos primeros adeptos: Jámblico de Calcis, de la primera mitad del siglo IV, compone una Colección de las doctrinas pitagóricas, de la cual se conservan algunas partes matemáticas en las que se ocupa de aritmética pitagórica en forma semejante a Nicómaco, a quien en buena medida comenta y completa. (4)

En contra de la tendencia de Nicómaco y de Jámblico, reaccionó Domnino de larisa del siglo V, quien, en un manual de introducción a la aritmética, sostiene la necesidad de volver al rígido sistema euclideo de demostración, insistiendo que en lugar de enunciar propiedades sobre la base de algunos casos particulares se debía volver a la representación de los números mediante segmentos rectilíneos y demostrar sus propiedades geométricamente. Pero no parece que su crítica haya tenido éxito.

Domnino fue condiscípulo de Proclo de Bizancio, uno de los más importantes miembros del neoplatonismo, que se estableció en Atenas como jefe de la escuela y autor de un importante *Comentario a los Elementos de Euclides*, cuya parte filosófica le pertenece, pero en cuya parte matemática utiliza escritores anteriores, desde Eudemo de Rodas hasta Pappus. Sólo se conserva de ese escrito el Comentario al Libro I de los Elementos en cuatro libros, que citamos un par de veces, y cuyo mayor interés se basa en los datos de interés histórico que trasmite. Como aporte geométrico mencionemos que en él aparece la primera mención a la construcción de la elipse mediante el recorrido de un punto fijo de un segmento que se mueve manteniendo sus extremos sobre dos ejes fijos.

Algo posterior a Proclo es otro comentarista: Eutocio de Ascalona a quien se deben comentarios a los escritos de Arquímedes: *De la esfera y del cilindro; De la medida del circulo; Del equilibrio de los planos* y a los cuatro primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio. Al comentar el primer escrito de Arquímedes aporta noticias interesantes sobre la resolución geométrica de los problemas de tercer grado.

Más difícil de ubicar en el tiempo y en el espacio es un geómetra griego: Sereno de Antisa o de Antinópolis, posiblemente posterior a Pappus, Proclo y Eutocio que no lo citan. Se le deben dos escritos geométricos: uno *Sobre la sección del cilindro* que se propone probar, en contra de la creencia de algunos geómetras, que las secciones elípticas de un cilindro no difieren de las secciones elípticas de un cono; y otro *Sobre las secciones del cono*, en el que estudia los triángulos obtenidos cortando un cono por planos que pasan por el vértice, abundando en ambos escritos de interesantes cuestiones geométricas.

Mientras tanto, en Atenas, a Proclo siguió en la jefatura de la escuela su discípulo Marino de Neapolis a quien, además de una prolija biografía de su maestro, se le debe un comentario a los *Datos* de Euclides con un extenso prefacio. A Marino siguió Isidoro de Mileto, quien tuvo por discípulos a Eutocio ya mencionado, y a Damascio de Damasco, de fines del siglo V, uno de los autores a quien se atribuye parte del apócrifo Libro XV de los *Elementos*. Damascio profesó en Atenas y fue el último jefe de la Academia,

cuando también profesaba en ella Simplicio, comentarista de las obras de Aristóteles, pero también de los *Elementos* de Euclides. Fue durante la jefatura de Damascio que en 529 Justiniano clausuró la Academia como último reducto del paganismo; y Damascio, Simplicio y otros cinco filósofos encontraron refugio en la corte persa.

Notas complementarias

(1) La aritmética de Nicómaco. En el libro I las únicas novedades respecto de los *Elementos* de Euclides se refieren a las progresiones aritméticas, que Euclides no trata y a la mención de los cuatro primeros números perfectos, agregando que deben terminar en 6 o en 8, propiedad que demostró Jámblico y a la que Boecio agregó la falsa inducción de aparecer esas terminaciones en forma alternada (el sexto número termina en 6 y no en 8). Agreguemos que el quinto número perfecto aparece en un manuscrito del siglo XV; que en 1592 se conocían 12 números perfectos y que más tarde, con las computadoras electrónicas, se pudo calcular otros tres, el último de los cuales $2^{1278}(2^{1279}-1)$ tiene aproximadamente 770 cifras.

Más interesante es el libro segundo de Nicómaco que se refiere a los números "figurados" señalando algunas propiedades, por ejemplo: todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos o, más general, todo número poligonal es suma de un poligonal de un lado menos y de un triangular. Habla de números piramidales como suma de poligonales semejantes; de números truncados, suprimiendo los primeros términos a los piramidales, de números heteromecos: producto de dos enteros consecutivos o dobles de los triangulares; de números paralelepípedos: cuadrado de un número por el consecutivo, etcétera. Dando algunas relaciones entre ellos. La más importante de esas relaciones es la que expresa que todo cubo es la suma de una serie de impares consecutivos, propiedad de la cual se deduce que la suma de los primeros *n* cubos es el cuadrado de la suma de los primeros *n* números consecutivos, y que Nicómaco no demuestra, pero que era conocida, pues figura en

el llamado *Código Arceriano* (del nombre de uno de sus propietarios; Joannes Arcerius de Groninga, del siglo XVI) compilación de conocimientos griegos, para agrimensores y administradores romanos, del siglo V o VI.

Por lo demás, puede deducirse fácilmente de las propiedades que figuran en Nicómaco. En efecto: si en la sucesión de impares consecutivos, comenzando por la unidad, se agrupan en la siguiente forma: el primero, los dos siguientes, los tres siguientes. Etcétera, se demuestra que esas diferencias de cuadrados no son sino los cubos sucesivos 1, 8, 27... ; De manera que la suma de los primeros n cubos será la suma de tantos impares consecutivos como suma de los n enteros consecutivos, es decir $[1/2n(n+1)]^2$; que expresado con números figurados, la suma de cubos es el cuadrado de un número triangular.

(2) El teorema de Menelao. En realidad Menelao no considera, como actualmente, un triángulo ABC cuyos lados son cortados por una transversal $A'B'C'$, sino los segmentos AB y AB', por cuyos extremos traza las transversales BC y $B'C'$ que se cortan en A', y demuestra la igualdad entre la razón de un par de segmentos y el producto de las razones de otros dos pares. Por ejemplo, trazando $CD \,//\, AB$ se tiene

$$AB' : CB' = AC' : CD \quad ; \quad CD : C'B = A'C : A'B$$

y eliminando CD se llega a la siguiente relación entre los segmentos rectilíneos

$$AB' / CB' = AC' / C'B \cdot A'B / A'C$$

Un teorema muy simple le permite pasar a la esfera. En un círculo de centro O considera una cuerda AB, y en ella un punto interior C (igual resultado se obtiene cuando el punto es exterior), que unido con O divide el arco AB en dos segmentos de arco AD y DB; las perpendiculares AA' Y BB', respectivamente semicuerdas de los arcos dobles (nuestros senos), son proporcionales a los segmentos AC y CB. De ahí que si en la figura anterior en lugar de segmentos se consideran arcos de círculos máximos de una esfera, se llega a la expresión, con nuestro simbolismo

sen AB' / sen CB' = sen AC' / sen C'B · sen A'B / sen A'C.

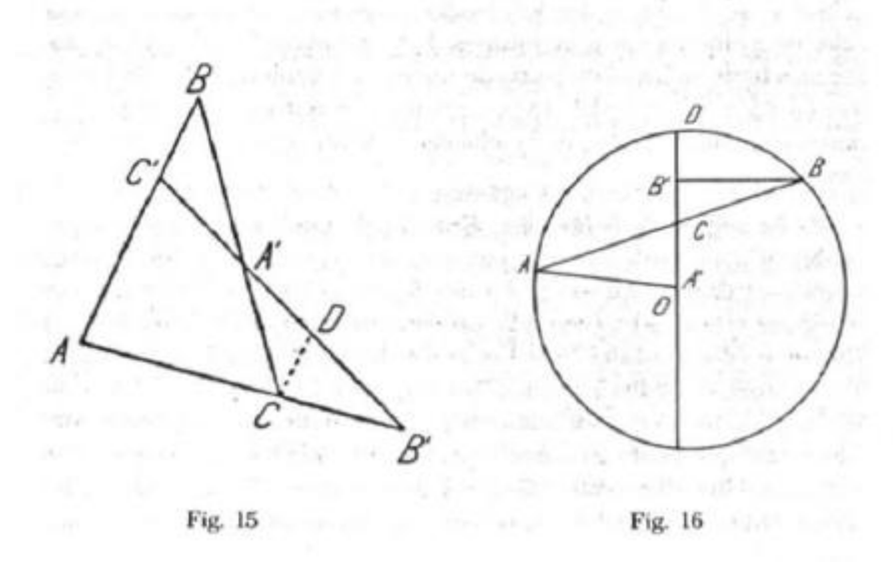


Fig. 15 Fig. 16

(3) La aritmética de Teón de Esmirna. Entre las propiedades de número, que Teón enuncia, sin demostrar, sólo citamos la siguiente: todo cuadrado es múltiplo de 3 o de 4, o múltiplo de esos números más l. Como consecuencia: ningún cuadrado es múltiplo de 3 o de 4 menos 1, o múltiplo de 4 más o menos 2.

Más interesante es la correspondencia que Teón expone entre dos series de números que obtiene geométricamente partiendo de una sucesión de cuadrados, en cada uno de los cuales el lado es la suma del lado más la diagonal del anterior. Teón llama a estos números *laterales* y *diametrales*, según midan los lados o las diagonales, enunciando algunas relaciones simples entre los mismos. Estos números l_n y d_n desempeñarán más tarde su papel en teoría de números: cumplen la relación fundamental $n_n^2 - 2d_n^2 = (-1)^n$, se presentan en las reducidas de ciertas fracciones continuas infinitas, en la solución de la llamada "ecuación de Pell", etcétera.

(4) La aritmética de Jámblico. Entre las propiedades de números que Jámblico "demuestra", ya con casos particulares o mediante los números figurados todas de fácil comprobación, figuran: el óctuplo de un número triangular más 1 es un cuadrado; un número

rectangular, cuyos factores difieren en dos unidades, más 1 es un cuadrado; la suma de dos números triangulares, de orden alternado, menos 1 es un heteromeco,… Ya dijimos que demostró que los números perfectos terminan en 6 o en 8; además afirmó que existe un número perfecto en cada miríada, lo que ya no es cierto. Una propiedad más interesante, por estar vinculada con las "cifras"; es decir, los números representativos de las unidades, decenas, centenas... es la siguiente: Si se tienen tres números consecutivos, el último de los cuales es múltiplo de 3, y se suman sus cifras, de este resultado vuelven a sumarse sus cifras y así sucesivamente, el resultado final es siempre el número 6.

Por último, es el escrito de Jámblico donde aparece la contribución "algebraica" de Timaridas, ya mencionada, consistente en un sistema lineal de varias incógnitas: determinar un número conociendo sus sumas con cada uno de n números desconocidos y con la suma de todos ellos. Si $a_1, a_2, \dots, +a_n$ y a son tales sumas, es claro que la incógnita x se obtiene mediante la expresión $x(a_1 + a_2 + \cdots a_n - a): (n-1)$ que es la regla que Jámblico atribuye a Timaridas y que denomina "epantema".

Además Jámblico reduce al "epantema" a un par de sistemas indeterminados, de los cuales da la solución mínima en números enteros.

Ptolomeo y Pappus

Claudio Ptolomeo forma, con su contemporáneo el médico Galeno de Pérgamo, la pareja de figuras científicas sobresalientes de este período. Poco se sabe de Ptolomeo: nació en Egipto y residió en Alejandría, donde realizó observaciones y trabajos astronómicos entre los años 127 y 151. Sabio enciclopédico, se ocupó de matemática, astronomía y astrología, geografía, óptica y acústica, cronología, aunque su fama científica se funda sobre el *Almagesto*, tratado que sistematizó la astronomía antigua y que constituyó, con su autor, las autoridades máximas e indiscutidas en materia de astronomía durante catorce siglos.

Su verdadero título, que acentúa su carácter matemático es *Sintaxis matemática*, en 13 libros, que más tarde llegó a conocerse como "la gran sintaxis de astronomía", para distinguirla de una "pequeña sintaxis" colección de algunas obras astronómicas menores; pero la admiración que la obra despertó hizo que se le aplicara el superlativo, griego *megiste* (la más grande) con lo cual, al anteponérsele el artículo en su versión árabe, el título se convirtió en el anacrónico *Almagesto* con que se le cita generalmente.

Si se excluye una obra probablemente juvenil, que se le atribuye, sobre la teoría de las paralelas y el conocimiento de las proyecciones ortográfica y estereográfica, toda la contribución matemática de Ptolomeo está diseminada en sus escritos astronómicos, en especial, en las partes de *Sintaxis matemática* que tratan las cuestiones matemáticas necesarias para el estudio racional de los fenómenos celestes.

En este sentido una exigencia fundamental fue la construcción de una "tabla de cuerdas" para los distintos arcos, partes alícuotas de la circunferencia. Tal construcción, iniciada por Hiparco, fue continuada y perfeccionada por Ptolomeo, (l) quien utilizó los resultados de Menelao para el análisis de los triángulos esféricos, de manera que el *Almagesto* constituye la primera sistematización de la hoy llamada "trigonometría plana y esférica". En muchas de las expresiones que figuran en el *Almagesto* si se cambia la palabra "cuerda" por la locución "doble del seno del arco mitad", se obtienen expresiones de nuestra trigonometría. (2)

Más matemático "profesional" es Pappus, también de Alejandría, de quien se sabe que hizo observaciones astronómicas en 320. Además de obras desaparecidas y de un comentario al libro décimo de los *Elementos*, que se conoce mediante un arreglo árabe, se le debe una obra importante en ocho libros: la *Colección matemática*, resumen de conocimientos anteriores con agregados originales, correcciones y críticas, que resultó de un valor inestimable por las informaciones históricas y bibliográficas que contiene acerca de la matemática griega.

De sus ocho libros, el primero y parte del segundo se han perdido, pero del contenido de la parte sobreviviente del segundo se desprende que probablemente esos dos libros se ocupaban de

cuestiones aritméticas. El libro tercero se ocupa de asuntos variados: proporciones, poliedros regulares, lugares geométricos, mientras que el cuarto revela mayor unidad, pues se ocupa de las curvas ideadas para la resolución de los tres problemas clásicos, a las que Pappus agrega alguna nueva. El libro V se dedica a los isoperímetros, mientras que el sexto y el octavo se ocupan de astronomía y de mecánica, respectivamente. El libro séptimo es el más interesante desde el punto de vista histórico. Dedicado a su hijo, comprende una serie de obras de autores anteriores, cuyo objeto era adiestrar en la resolución de los problemas geométricos a aquellas personas que ya habían adquirido cierto dominio de la geometría, mediante el estudio de sus elementos. Entre esas obras, algunas debidas a Euclides, Apolonio y Erastótenes están hoy pérdidas, de ahí el valor documental de la *Colección* de Pappus que nos las conservan. Mas a este valor extrínseco debe agregarse el valor intrínseco de los comentarios y agregados del mismo Pappus, para facilitar y completar esas obras. Baste citar entre esos agregados una proposición, cuyo enunciado se conoció durante mucho tiempo como "teorema de Guldin", del nombre del matemático suizo del siglo XVII que lo redescubrió. (3)

Notas complementarias

(1) La "tabla de cuerdas" de Ptolomeo. He aquí lo que dice al respecto Ptolomeo en el primer libro del *Almagesto*: "Para facilitar la tarea práctica, construiremos una tabla de estos segmentos dividiendo la circunferencia en 360 partes, tomando los arcos de medio grado en medio grado, y dando para cada arco el valor de la cuerda respectiva, suponiendo dividido el diámetro en l20 partes. El uso demostrará que estos números son los más cómodos. Ante todo, demostraremos que con un cierto número de teoremas, el menor posible y siempre los mismos, se podrá obtener un método general y rápido para hallar aquellos valores. No nos limitaremos a presentar la tabla con esos valores, sino que haremos conocer la teoría para facilitar la manera de encontrarlos y verificarlos,

exponiendo su método de construcción. Para evitar las fracciones utilizaremos la división sexagesimal y en las multiplicaciones y divisiones tomaremos siempre los valores más aproximados de manera que, no obstante lo que despreciaremos, los resultados serán sensiblemente exactos".

Para construir su tabla, Ptolomeo comienza por considerar los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 10 lados, que dan las cuerdas de 36°, 60°, 72°, 90°, l2O°. De ellas, mediante el teorema de Pitágoras, obtiene las cuerdas del 108° y 144°, mientras que del teorema de los cuadriláteros inscriptibles obtiene las cuerdas de arcos diferencia; así el de 12°, partiendo de los de 60° y 72°, pasando luego de la cuerda de 12° a las de 6°, 3°, 1°30' y 45', utilizando un teorema de los arcos mitad.

Ahora Ptolomeo demuestra el siguiente teorema: dados dos arcos desiguales, ambos menores que un recto, la razón entre el arco mayor y el arco menor, es mayor que la razón entre las cuerdas respectivas, que equivale a demostrar con nuestro simbolismo que la función *sen x : x* es decreciente.

Este teorema era conocido por Aristarco y por Arquímedes, pero la primera demostración conocida es la de Ptolomeo. (Véase fig. 20.)

Sean $a < b$ los dos arcos y sus cuerdas AB y BC. Si el punto O, medio del arco AC que no contiene a B, se une con A, B, C y el punto M medio de AC, el teorema de las bisectrices da

$$NC : AN = BC : BA = (2\ MN + AN) : AN$$

Si, por otro lado, el arco HK de centro O y radio ON determina el sector NOH, menor que el triángulo NOA, y el sector KON, mayor que el triángulo MON, tendremos

$$MN : NA = MON : NOA < ONK : ONH = \beta : \alpha,$$

siendo α y β los ángulos de los sectores. Y en definitiva.

$$BC : BA = (2\ MN + AN) : AN,\ (2\beta + \alpha) : \alpha = b : \alpha$$

y la razón de los arcos es mayor que la razón de las cuerdas respectivas.

Ptolomeo aplica el teorema para obtener aproximadamente la cuerda de 1°, conociendo las cuerdas de 45' y de 1°30'. En efecto, la razón entre las cuerdas de 1° y de 45' es menor que la de sus arcos respectivos: 60’ y 45’, es decir 4:3; de la misma manera la razón entre las cuerdas de 1°30' y de 1° es menor que 3:2; obteniendo

para su cuerda incógnita valores por exceso y por defecto que permite dar para ella el valor: cuerda 1° = 377 : 360, que da para el sen 30' un valor exacto hasta la sexta decimal.

Partiendo del valor de cuerda 1°, y mediante una adecuada utilización de las fórmulas que expresan los teoremas de adición, Ptolomeo construye su "tabla de cuerdas", sirviéndole de control los valores ya calculados de cuerdas de arcos notables. Para las fracciones menores que 30' utiliza la interpolación lineal.

De paso observemos que el valor de cuerda 1° permite obtener para el valor aproximado 377 : 120 = 3,141666 ... que en alguna ocasión Ptolomeo utiliza sin mencionar su origen, limitándose a observar que está comprendido entre los valores de Arquímedes: $3^1/_7$ y $3^{10}/_{71}$.

(2) La "trigonometría" del *Almagesto*. Uno de los teoremas que emplea Ptolomeo en la construcción de la tabla, y que hoy lleva su nombre, es el que expresa la conocida relación entre los lados y las diagonales de un cuadrilátero inscriptible. Su demostración es muy simple: si *ABCD* es el cuadrilátero y se traza *BE* tal que los ángulos *AED* y *BCD* sean iguales, las parejas de triángulos *AEB* y *BCD*; *BEC* y *BDA*, son semejantes, de donde

AE · BD = AB · CD; EC · BD = AD · BC, igualdades que sumadas expresan el teorema de Ptolomeo: *AB · CD + AD · BC = AC · BD.*

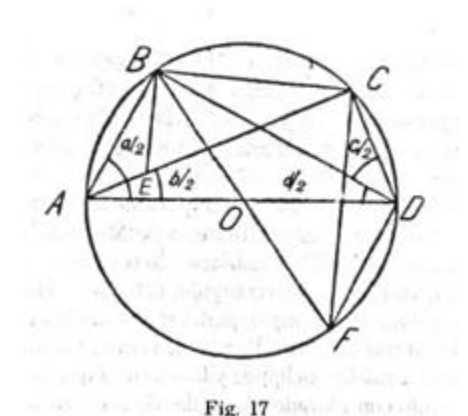


Fig. 17

En el caso particular de ser AB un diámetro y llamando a y b los arcos AC y AB, respectivamente, el teorema del cuadrilátero en este caso puede escribirse: cuerda b · cuerda $(180° - a) + AD \cdot Cuerda\ (a - b) = cuerda\ a$ · cuerda (180° - b), que no es sino el "teorema de sustracción" de nuestras funciones circulares.

Ptolomeo, demuestra también el "teorema de adición". Toma para ello el cuadrilátero inscripto $BCDF$, siendo F el simétrico de B respecto del centro O de la circunferencia en el cual vale $BC \cdot DF + CD \cdot BF = BD \cdot CF$ o, lo que es lo mismo, $BC \cdot AB + AD \cdot CD = BD \cdot CF$ que puede escribirse, llamando $b = d$ y $a = c + d$: cuerda $c \cdot cuerda\ d + AD, cuerda\ [180° - (c + d)] = cuerda\ (180° - c\ ), cuerda\ (180° - d),$ que es una forma del teorema de adición.

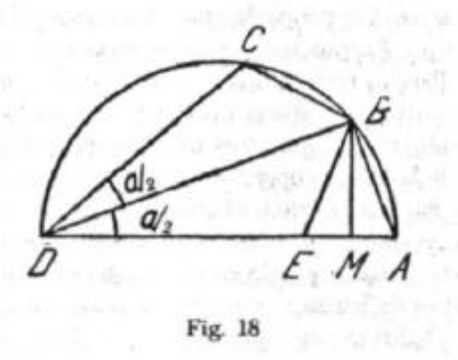


Fig. 18

Otro teorema, que aporta Ptolomeo, equivale a la relación de las funciones de un arco y de su mitad. Sean AB y BC dos arcos iguales; si desde el extremo D del diámetro que pasa por A se trazan DC y DB, y desde este último punto la normal BM a AD y BE simétrica de BA respecto de esa normal, se tendrá

$$AB^2 = AM \cdot AD = ½\ AD\ (\ AD – DE\ ) = ½\ AD\ (\ AD – DC\ )$$

Y por tanto (cuerda $a)^2$ = ½ AD · [AD - cuerda (180° - 2a)]
que no difiere, sino en la escritura, de la relación entre las funciones de un arco y de su arco doble. .

Así como "el teorema de Ptolomeo" permite a éste demostrar relaciones "trigonométricas" planas, el "teorema de Menelao" cumple esa función en lo que atañe a la esfera estableciendo relaciones entre los elementos de los triángulos esféricos rectángulos (Ptolomeo los considera triángulos oblicuángulos). Por ejemplo, para determinar la ascensión recta y la declinación de un punto de la eclíptica, considera los cuatro círculos máximos

siguientes: ecuador, eclíptica y los círculos que pasan por los polos celestes y el punto considerado y los polos de la eclíptica. Eligiendo convenientemente entre esos círculos los que actúan de transversales el teorema de Menelao permite dar expresiones que resuelven el problema y que hoy no son sino aplicaciones de las fórmulas que resuelven los triángulos esféricos rectángulos.

(3) La Colección de Pappus. Entre las cuestiones de interés matemático o histórico que aparecen en Pappus, mencionemos las siguientes: En el libro segundo Pappus se ocupa de un sistema de numeración, atribuido a Apolonio, semejante al que Arquímedes expone en el *Arenario*, de base la miríada, y no la miríada de miríada. En conexión con ese sistema, Pappus expone algunos procedimientos, que también atribuye a Apolonio, para facilitar las operaciones aritméticas con números grandes, que en definitiva equivalen a reducir esas operaciones a operaciones con dígitos, como ocurre con nuestro sistema decimal.

En el libro tercero se ocupa de una solución aproximada del problema del mesolabio, que Pappus reconoce que no es exacta. Es a raíz de este problema que Pappus recuerda la definición de lugares geométricos.

También en este libro aparece un problema de interés histórico. Se trata de determinar, mediante tres números en progresión geométrica, los elementos de las diez proporciones o medias, que aún estaban en uso en la época de Pappus, y que probablemente eran de origen pitagórico. No interesa mayormente la solución particular que Pappus da de este problema indeterminado; puede en cambio tener interés recordar la definición y nombre de las diez proporciones o medias de la antigua matemáticas griega. Dados tres números a, b, c, se dice que, forman una proporción aritmética, geométrica, armónica, contra-armónica, quinta y sexta, según que la razón
$(a - b) : (b - c)$ sea igual, respectivamente, a $a : a; a \cdot b; a \cdot c; c : a; c : b$ y $b : c$.

Se dice que están en proporción séptima, octava y novena, según qué la razón $(a - c) : (a - b)$ sea igual a $b : c; a : b; a : c$, respectivamente. Y finalmente están en proporción décima si $(a - c) : (b - c) = b \cdot c$. Los ejemplos numéricos que obtiene Pappus

son los siguientes: (6,4,2); (4,2,1); (6,3,2); (6,5,2); (5,4,2); (6,4,1); (3,2,1); (6,4,3); (4,3,2); (3,2,1); en su orden.

En el libro cuarto, Pappus trata cuestiones variadas. En la primera sección, demuestra una muy simple generalización del teorema de Pitágoras: Si a los lados AB y AC de un triángulo ABC se adosan dos paralelogramos P_1 y P_2; y A' es la intersección de los lados paralelos a AB y AC, el segmento AA', en magnitud y dirección, forma con el tercer lado BC un paralelogramo $P = P_1 + P_2$. La demostración por equivalencias es inmediata.

Otra cuestión que trata Pappus en esta primera sección trae a colación una familia de curvas, cosa poco frecuente en la geometría griega. Pappus considera el *arbelos* de Arquímedes y en la zona comprendida entre dos de los tres semicírculos inscribe una serie de círculos tangentes entre sí, dando la ley que relaciona la altura del centro de cada círculo con su radio. En forma algo más general esa relación expresa que en la sucesión numerable de esos círculos aquella razón, al pasar de un círculo al sucesivo, disminuye en dos unidades (Pappus considera los casos particulares en los cuales la primera razón es 0 y 1). Esta demostración, que en Pappus exige una larga y engorrosa serie de teoremas y que mediante la geometría analítica se resuelve con relativa facilidad es de solución inmediata utilizando la "transformación por inversión", lo que no deja de constituir un buen ejemplo de comparación de métodos antiguos y modernos.

En la segunda sección de este libro, Pappus se ocupa de la espiral de Arquímedes, de la concoide de Nicomedes y de la cuadratriz de Hipias estudiando sus propiedades ya para resolver el problema, más general que el de la trisección, de dividir un ángulo en dos partes que estén en una razón dada; ya para extender la definición de la espiral al espacio mediante el movimiento de un punto sobre la esfera.; ya dando nuevas maneras de engendrar la cuadratriz mediante superficies helicoidales que Pappus denomina *plectoides.*

El libro quinto se ocupa de los isoperímetros. En el prefacio, al observar que las abejas construyen sus celdas en forma de prismas de base hexagonal y recordar que entre los tres polígonos que pueden llenar el plano: triángulo, cuadrado y hexágono, es este último el que, a igualdad de área, su perímetro es el mayor, trae a

colación comparaciones entre la inteligencia humana y la de los animales. Es en este libro donde se mencionan los poliedros semirregulares de Arquímedes y donde se demuestran propiedades geométricas que hoy se traducen en igualdades y desigualdades entre las funciones circulares.

Pero sin duda es más importante el libro séptimo, donde Pappus, al comentar los escritos que reproduce, agrega y completa teoremas. En ese libro aparece el "teorema de Guldin" que Pappus enuncia como: las figuras engendradas por rotación completa se obtienen como producto de lo que gira por el camino recorrido por el centro de gravedad móvil. También en este libro figura "el problema de las tres o más rectas" que Descartes llamará "problema de Pappus", así como una serie de teoremas y proposiciones de álgebra geométrica, algunos de carácter más gráfico o proyectivo que métrico.

Así estudia: el problema de determinar sobre una recta, que contiene los puntos $A, B, C, D,$ un punto X tal que la razón

$$AX \cdot BX : CX \cdot DX$$

sea máxima o mínima; demuestra casos particulares de la identidad

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot CA + CD^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$$

Así como la constancia de la razón doble de cuatro puntos determinados sobre una transversal por un haz de rayos, y la propiedad que en un cuadrilátero completo cada diagonal es dividida armónicamente por las otras dos, un caso particular de la cual no es sino el teorema del hexágono de Pascal en el caso en que la cónica degenera en dos rectas.

Respecto de las cónicas se debe a Pappus la primera mención del foco de la parábola y de las directrices de las cónicas, así como la definición de éstas mediante la razón constante entre las distancias a un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz).

Por último, en el libro octavo, dedicado a la mecánica, mencionamos que en él aparece la definición de centro de gravedad, que no figuraba en los escritos de Arquímedes.

Herón y Diofanto

Herón de Alejandría es, o fue, una de las figuras más discutidas en la historia de la matemática. Hoy se lo ve con más claridad; con toda verosimilitud se lo ubica en la segunda mitad del siglo I y se considera su obra más como la de un técnico, un mecánico práctico, que de un matemático. También hoy sabemos, por fuentes árabes, que la llamada no muy correctamente "fórmula" de Herón, procede de Arquímedes. Es la conocida expresión del área de un triángulo en función de sus lados.(l) Como teorema geométrico, probablemente interpolado, aparece en un escrito de Herón denominado *Dioptra*, donde describe un aparato que lleva este nombre, lejano precursor sin lentes del teodolito actual, y cabal manual para agrimensores, mientras que bajo la forma de un ejemplo numérico de la aplicación de la "fórmula" aparece en otro escrito denominado *Métrica*, más matemático, pero no muy "griego", donde utiliza otras contribuciones de Arquímedes. Es un escrito en tres libros,(2) que se refiere a áreas y volúmenes de figuras planas y sólidas así como a la división de figuras, pero en la que, en contra de la tendencia euclidea, no sólo aparecen ejemplos numéricos con fracciones unitarias sino también resultados aproximados en aquellos casos en que la geometría euclidiana no permite dar exactamente el área o el volumen de la figura considerada, estudiándose hasta figuras de contornos cualesquiera; de ahí que se viera en esta obra y en Herón reminiscencias de la matemática de los antiguos pueblos orientales, en especial de los babilonios.

Aun menos "griego" y más vinculado por su producción a la matemática de los babilonios, es el matemático más original de este periodo: Diofanto de Alejandría, probablemente del s III. De atenernos a un epigrama de la llamada *Antología griega* (3) estaríamos mejor informados en lo que se refiere a la edad en la que habría fallecido Diofanto, aunque es poco probable que ese epigrama tenga alguna finalidad informativa.

De Diofanto se conoce un fragmento de un escrito *Sobre los números poligonales,* y seis libros de su *Aritmética* que, según el

prefacio debía tener trece, aunque parece que en verdad no se compusiera sino de los seis aún existentes.

Sobre los números poligonales es un estudio de teoría de números cuyo resultado importante es la generalización de la propiedad de los números impares de ser su óctuplo más uno un cuadrado. En efecto. Diofanto demuestra en forma retórica la propiedad que hoy expresaríamos: $[2n\,(p\text{-}2) - (p\text{-}4)]^2 = 8P\,(p\text{-}2) + (p\text{-}4)^2$, siendo P un número poligonal de lado p y n términos.

Pero más novedosa y original es su *Aritmética*, que no contiene teoremas o proposiciones, sino problemas entre números abstractos, con excepción de un problema entre cantidades, aunque poco real, que figura también en la *Antología* y la colección de problemas del último libro en el cual los datos y las incógnitas son elementos de triángulos rectángulos que han de satisfacer por tanto a la ecuación pitagórica.

Las características de los problemas de la Aritmética son:

a) Se trata de problemas, a veces determinados, pero en más de los casos indeterminados, en los cuales la solución que halla Diofanto comporta exclusivamente números racionales positivos (y no necesariamente enteros como haría pensar la denominación de análisis diofántico con que a veces se designa este estudio);

b) En la resolución de tales problemas se aplica cierto simbolismo semejante al actual, por lo menos en el tratamiento de los polinomios con una letra; (4)

c) En los problemas de Diofanto no aparece orden alguno, ni en lo referente a la naturaleza de los problemas, ni en cuanto al método de resolución, aunque pueden agruparse siguiendo ciertos criterios de analogía. Los métodos de resolución aparecen distintos en cada caso particular, pero la elección del método y los recursos auxiliares de los que echa mano Diofanto, confieren a su escrito la fisonomía algebraica que los caracteriza y distingue de los demás escritos griegos.

La habilidad e ingeniosidad, de que Diofanto revela en especial en sus problemas de análisis indeterminado de sistemas no lineales no son, sin embargo, casuales: se fundan sobre el conocimiento de una gran cantidad de propiedades aritméticas, que no demuestra, pero que aplica, por ejemplo el producto de dos números, cada uno de los cuales es suma de dos cuadrados y puede expresarse de dos

maneras distintas como suma de dos cuadrados; todo cubo es suma de tres cubos, etcétera. (5)

Notas complementarias

(1) La “fórmula” de Herón. Ordinariamente se da este nombre a la expresión $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ siendo *a, b, c,* los lados de un triángulo y *p* su semiperímetro, que implica un doble anacronismo: hablar de "fórmula" y utilizar una notación algebraica actual para referirse a un teorema griego, amén de ese producto de cuatro segmentos que aparece en la expresión que carece de contenido intuitivo y de interpretación geométrica.

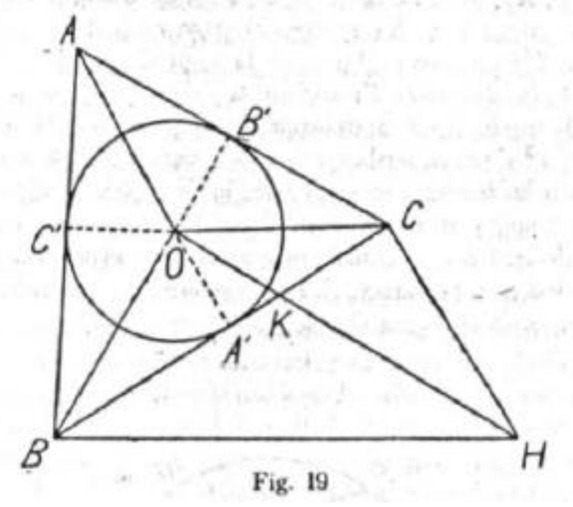


Fig. 19

Por supuesto que el teorema de Herón o de Arquímedes no incurre en tales anacronismos. Se trata de un típico teorema de la geometría griega que puede considerarse un modelo del método sintético, pues en él se parte de ciertas propiedades conocidas para deducir de ellas el resultado, pero sin señalar por qué se partió de aquellas propiedades conocidas que, por lo demás, en este caso no tienen nada que ver aparentemente con la equivalencia de figuras pues se trata de las propiedades de los segmentos determinados en los lados del triángulo por los puntos de tangencia del círculo inscrito. Es posible que el inventor del teorema haya partido más directamente de la equivalencia del triángulo con el rectángulo de

igual base y mitad de la altura para luego, mediante los recursos del "álgebra geométrica" comprobar que en el resultado aparecen aquellos segmentos y de ahí haya buscado y encontrado una demostración más directa partiendo de ellos.

He aquí resumida la marcha de la demostración del teorema, utilizando por comodidad el simbolismo actual. Sea el triángulo *ABC* de lado *a, b, c,* semiperímetro *p* y radio *r* del círculo inscrito de centro *O*, y puntos de tangencia *A', B', C',* tales que $AC' = p - a$; $BA' = p - b$; $CA' = p - c$.

De los extremos de los segmentos *OB* y *BC* se trazan las normales a los mismos que se cortan en *H* y configuran el cuadrilátero inscriptible *BOCH*, de ahí la igualdad de los ángulos *HBC* y *HOC*. Por otra parte este ángulo *HOC* es igual al ángulo *OAC'* (ambos son complementarios de la suma de los ángulos en *B* y en *C*.), de manera que se tienen dos pares de triángulos semejantes: *HBC, OAC' y OA'K, KCH*, siendo *K* la intersección de *BC* con *OH*.
Si $CH = h$; $A'K = k$, de la primera pareja de triángulos semejantes se deduce $(p - a) : a = r : h$ o sea $(p - a) : p = r : (r + h)$ razón esta última que es igual en la segunda pareja a
$k : (p - c) = k (p - b) : (p - b) (p - c)$. En definitiva puede escribirse
$p (p - a) : p^2 = k (p - b) : (p - b) (p - c)$. Si del triángulo rectángulo *BOK* se deduce que $k (p - b) = r^2$ y se recuerda que $pr = S$ siendo *S* el área del triángulo al introducir las medias proporcionales $m^2 = p (p - a)$ y $n^2 = (p - b)(p - c)$ resulta $S = mn$, y el teorema está demostrado. Como vemos la raíz del producto de cuatro segmentos que aparece en la expresión algebraica no es sino el disfraz del producto de dos segmentos cada una de los cuales es medio proporcional entre dos segmentos que se obtiene de los lados del triángulo.

(2) La Métrica de Herón. El primer libro de la Métrica está dedicado a las superficies de las figuras planas y sólidas. Después de una introducción histórica se ocupa de triángulos, aplicando la fórmula del área conociendo los lados; luego de cuadriláteros especiales, aunque no del inscriptible limitándose a señalar que en el caso general además de los lados debe darse una diagonal.

Para los polígonos regulares da fórmulas aproximadas mediante coeficientes que expresan la razón entre el lado y el área y el radio

y su cuadrado respectivamente. Algunas de estas fórmulas las atribuye Herón a Hiparco. Para el heptágono por ejemplo esos coeficientes son $^7/_8$ y $^{43}/_{12}$. Para el área de figuras circulares, o de la elipse o de las superficies de cuerpos redondos utiliza los resultados de Arquímedes, tomando para π en general el valor $^{22}/_7$, aunque en algún caso admite $\sqrt{3\pi} = 3$.

La finalidad puramente práctica del libro se refleja en las reglas para el área de figuras de contornos cualesquiera, que aconseja sustituir por un polígono lo más aproximado posible y hasta de superficie de objetos en el espacio como estatuas aconsejando ahora revestir la superficie con hojuelas de papiro o de tela muy fina, que luego se extienden en un plano midiendo su área como en el caso anterior.

También Arquímedes es la guía en el segundo libro, que trato de volúmenes; agrega el volumen del toro con su fórmula exacta pero deducida intuitivamente; para los poliedros regulares da expresiones aproximadas y para cuerpos de formas cualesquiera aconseja o bien el método de Arquímedes; midiendo el volumen del agua desalojada por el cuerpo, al sumergirlo en un recipiente con ese líquido; o bien, de manera más ingeniosa, recubriendo el cuerpo con arcilla hasta dar al cuerpo y su revestimiento la forma de un paralelepípedo: la diferencia entre los volúmenes del prisma y el de la arcilla utilizada es el volumen del cuerpo.

El libro tercero está dedicado a la división de figuras planas o sólidas en partes que estén en una razón dada o en determinadas condiciones prefijadas dando en algunos casos soluciones interesantes.

En la Métrica de Herón existen ejemplos de extracción aproximada de raíces cuadradas y hasta un ejemplo de raíz cúbica. Para la raíz cuadrada emplea una regla, sin duda conocida por Arquímedes, según la cual si a es un valor aproximado de N un valor más aproximado es ½ $(a + \frac{N}{a})$, que coincide con el valor de los dos primeros términos del desarrollo en serie de

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a\left(1 + \frac{b}{2a^2} + \cdots\right) =$$

$$= a + \frac{N - a^2}{2a} + \cdots = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right) + \cdots$$

hecho que explica la buena convergencia del procedimiento, ya que el nuevo error es del orden del cuadrado del error anterior.

En cuanto a la raíz cúbica, el único ejemplo que trae Herón (la raíz cúbica de 100, de la cual da el valor aproximado 4 $^9/_{14}$) no hace fácil advertir la regla empleada. Con todo, de ese ejemplo parecería deducirse que Herón siguió un "método de falsa posición", no lineal sino cuadrático. La expresión algebraica que se deduce del ejemplo utilizado diría que si $N = (a+1)^3 - c_2 = a^3 + c_1$ el valor aproximado de su raíz cúbica se obtiene como razón entre $(a+1)^2 c_1 + a^2 c_2$ y $(a+1)c_1 + ac_2$. (En el ejemplo numérico *N = 100*, *a = 4*; y la raíz cúbica aproximada es 4 $^9/_{14}$ con un error menor que 0,02.)

(3) La Antología griega. Con este nombre o de *Antología palatina*, atribuida a un Metrodoro de fines del siglo V o comienzos, del VI, se conoce una colección de 48 epigramas con problemas de índole muy variada, que hoy se incluirían en la matemática recreativa. En general, son problemas curiosos con enunciados pintorescos que se resuelven con simples raciocinios o, a lo sumo, con ecuaciones lineales, con excepción del "problema de los vinos" que aparece en la *Aritmética* de Diofanto. Además, uno de los epigramas revelaría la edad de este matemático. Según ese epigrama Diofanto transcurrió en la niñez el sexto de su vida, un dozavo en la adolescencia y que, después de otro séptimo de su existencia, se desposó naciéndole un hijo a los cinco años de casado. Más el hijo vivió la mitad de la vida del padre y éste, afligido, buscó consuelo en la ciencia de los números y cuatro años después de la muerte del hijo, falleció. Un cálculo simple da para la vida de Diofanto 84 años, aunque otra interpretación del epigrama, admitiendo que el hijo hubiera muerto cuando tenía la mitad de la edad del padre, abrevia la vida de Diofanto a 65 años y un tercio.

(4) El simbolismo de Diofanto. En el primer libro de su *Aritmética* Diofanto expone los signos que utilizará y sus reglas operatorias.

Los signos son: signos literales para indicar las tres primeras potencias de la incógnita, que reitera para indicar las tres siguientes; un signo especial agregado a las anteriores servía para indicar las potencias recíprocas; agregando un par de signos más para la igualdad y la sustracción, en cambio no hay signo para la suma; ésta se indica escribiendo los sumandos uno tras otro. Como esos signos (deformados, sin duda, por copistas posteriores) parecen ser las iniciales de las palabras griegas correspondientes podría decirse con algún abuso de lenguaje que el "álgebra" de Diofanto es "sincopada", es decir, está en esa etapa que recorrerá más adelante entre el álgebra retórica, sin símbolos, y la simbólica actual.

Aún limitada, pues no dispone sino de una incógnita que le obliga a ciertos recursos y artificios cuando se trata de problemas de varias incógnitas y sus potencias no van sino desde la sexta negativa a la sexta positiva, su álgebra le permite operar con potencias y polinomios, agregando también la operación de pasar de un miembro a otro de sus igualdades. Y agrega Diofanto: “Considerando la suma, la diferencia, el producto y la razón de estos números combinados con sus lados, se llega a enunciar una cantidad de problemas, cuya solución se logra por el camino que enseñaré".

(5) Los problemas de Diofanto. En todos sus problema, Diofanto adopta para las constantes, valores numéricos particulares, pero el método que emplea es en general independiente de esos valores que, por supuesto, están elegidos de antemano para que el problema tenga solución. Veamos algunos ejemplos de los distintos tipos de problema de la *Aritmética* de Diofanto.

a) Problemas de primer grado con una incógnita.

El primer problema de la *Aritmética* consiste en determinar dos números conociendo su suma y su diferencia. Dice Diofanto: Si x es el menor de esos números el mayor será $x + d$ (la diferencia conocida) de manera que $2x + d$ será la suma también conocida, de ahí que el menor será la semidiferencia de los datos y el mayor la semisuma (Diofanto dice el menor más la semidiferencia).

Un problema interesante (que geométricamente equivaldría a buscar el cuarto armónico de una terna dada) es el que Diofanto

enuncia diciendo: Dados dos números, buscar un tercero tal que los productos de cada uno de ellos por la suma de los otros dos estén en progresión aritmética. Diofanto distingue y resuelve los tres casos posibles. En todos los casos el problema se resuelve mediante una simple ecuación que exprese que uno de los productos sea media aritmética de los otros dos. Por supuesto que los datos de Diofanto están elegidos de manera que la solución sea positiva.

b) Sistemas lineales.

En general, cuando aparecen varias incógnitas, Diofanto mediante la introducción de variables auxiliares reduce el problema al caso anterior. Por ejemplo en un sistema que con nuestros símbolos sería

$$(x + a) : (y - a) = m \;;\; (x + b) : (x - b) = n$$

toma como incógnita auxiliar $(y - a)$ que determina mediante eliminación de x.

En otros problemas esa elección es menos evidente, pero más feliz. Por ejemplo, sea calcular cuatro números conociendo las cuatro diferencias entre la suma de tres de ellos y el restante. Para ello, Diofanto introduce una quinta incógnita auxiliar, como semisuma de las cuatro incógnitas del problema; y deduce fácilmente mediante una ecuación de primer grado esta quinta incógnita, y de ahí los números buscados. (En efecto, cada una de las incógnitas del problema es la quinta incógnita menos la mitad de uno de los datos.)

c) Ecuaciones de segundo grado.

Diofanto conoce la resolvente de la ecuación cuadrática aunque no considera sino una sola raíz; la positiva, aun en el caso en que la ecuación contenga dos raíces positivas. Veamos el "problema de los vinos", en el cual Diofanto despliega singular habilidad. Se trata de determinar las cantidades de dos clases de vino de precios proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades. Si éstas son x e y, el problema se reduce a resolver el sistema, con nuestros símbolos:

$$8x + 5y = z^2 \;;\; z^2 + 60 = (x + y)^2.$$

Diofanto comienza por tomar como incógnita auxiliar $u = x + y$ que lo lleva al sistema $u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y$ y, por tanto, a las desigualdades $8u > u^2 - 60 > 5u$. Considerando las resolventes de las

ecuaciones cuadráticas correspondientes (transformando las desigualdades en igualdades), que en ambos casos no tienen sino una sola raíz positiva, encuentra que u está entre 11 y 12. Como $u^2 - 60$ debe ser un cuadrado Diofanto, para reducir la ecuación a lineal, introduce una nueva incógnita v tal que $u^2 - 60 = (u - v)^2$ y utilizando los valores extremos de u llega a un nuevo par de inecuaciones en v : $22v < 60 + v^2 < 24v$. En este caso, las ecuaciones correspondientes tienen ambas dos raíces positivas, pero por el resultado se advierte que Diofanto no considera sino la mayor. Llega así a la desigualdad $19 < v < 21$. Toma $v = 20$, de ahí u = $^{23}/_2$ y de ahí $x = {}^{59}/_{12}$; $y = {}^{79}/_{12}$; $z = {}^{17}/_2$.

También en el caso de sistemas de grado superior al primero la solución depende de la adecuada elección de variables auxiliares. Por ejemplo, en el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que nosotros escribiríamos;

$$x (y + x) = a ; \; y (z + x) = b ; z (x + y) = c$$

toma como nuevas incógnitas: $xz = u; yz = v$, pasando al sistema lineal $u + v = c; u - v = a - b$; de ahí los valores de u y v y con ellos los de x^2 ; y^2 ; z^2 .

d) Sistemas indeterminados.

Es en estos sistemas donde Diofanto pone de relieve su habilidad "algebraica". Es claro que los problemas indeterminados de primer grado no tienen para nosotros mayor interés, pues siendo los coeficientes racionales existe una infinidad de soluciones racionales. En estos casos Diofanto adopta una sola de ellas como solución o determina la que corresponde a un valor prefijado de una de las incógnitas. Pero en los sistemas de grado superior esto no puede hacerse, y es necesario acudir a recursos especiales.

En algún caso Diofanto habla de "expresión general", por ejemplo cuando enuncia las reglas para encontrar dos números tales que su producto más (o menos) su suma es un valor dado, regla que equivale a escribir $xy + (x + y) = a$ en la forma $(x + 1) (y + 1) = a + 1$, de ahí que conocido uno de los números se obtiene el otro.

En general, Diofanto resuelve estos problemas mediante adecuadas elecciones de variables auxiliares. Así, si la ecuación es $x^2 + y^2 = a^2$ hace $y = xz - a$ y la ecuación se torna lineal en x ; igualmente la ecuación $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ se hace lineal en z mediante

las sustituciones $x = zu - ma$; $y = zv - b$; o la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ se hace lineal en y con $x = y + z$.

En otros casos la solución es más rebuscada, pero no por eso menos ingeniosa. Sea, por ejemplo, determinar cuatro números tales que sumando a cada uno de ellos el cuadrado de su suma se obtenga en todos los casos un cuadrado. Para resolverlo, Diofanto acude a una propiedad de los triángulos rectángulos: el cuadrado de la hipotenusa más cuatro veces el área es un cuadrado (de la suma de los catetos), de ahí que el problema se reduzca ante todo a buscar cuatro triángulos rectángulos de igual hipotenusa, que logra partiendo de dos triángulos rectángulos cualesquiera de catetos $b, c; b', c'$ e hipotenusas respectivamente, a , a' utilizando factores de proporcionalidad y las identidades entre sumas de dos cuadrados. En efecto, los triángulos de catetos $ba', ca'; b'a, c'a; bb' + cc', bc' - b'c, bb' - cc', bc' + b'c$ respectivamente, tienen todos la misma hipotenusa aa'. De esta manera se obtienen cuatro números (los cuádruplos del área) que, sumados al mismo cuadrado, se obtienen cuadrados. Para que ese cuadrado común sea a su vez suma de esos números bastará encontrar un factor de proporcionalidad que haga cumplir esa condición.

El sexto libro de *Aritmética*, con excepción del último problema que es de "los vinos", está dedicado íntegramente a problemas de triángulos rectángulos de lados racionales, de manera que se trata siempre de un sistema de ecuaciones una de las cuales es la pitagórica. La solución depende en cada caso del problema. Veamos un par de ejemplos; Determinar un triángulo tal que el área más un cateto sea un cuadrado y el perímetro, un cubo. En este problema, como en otros, no hay respeto alguno por la homogeneidad característica que señalamos también en algún problema de los babilonios. Diofanto parte de la solución general de la ecuación pitagórica atribuida a los pitagóricos que por comodidad afecta por un factor de proporcionalidad, con lo cual llega a las condiciones que un cierto número u debe ser, tal que $2u + 1$ debe ser un cuadrado y su doble un cubo, lo que exige que $2u + 1$ debe ser el cuádruplo de una sexta potencia. Toma como base de esta potencia la unidad que da para u el valor $^3/_2$ y de ahí obtiene para los lados del triángulo $^8/_5$; 3 y $^{17}/_5$ cuya área $^{12}/_5$ más el cateto $^8/_5$ es cuadrado de 2 y cuyo perímetro 8 es un cubo.

Otro problema, también de reminiscencias babilónicas, pide determinar un triángulo rectángulo tal que el área más un cateto sea una constante dada, que Diofanto toma igual a 7. Si la indicamos con *a*, el sistema a resolver es $\frac{1}{2}xy + \frac{x}{5} = a; x^2 + y^2 = z^2.$ El proceso que sigue Diofanto puede resumirse así: si se considera un triángulo semejante al buscado de factor de proporcionalidad *h*, la primera ecuación se convierte en una ecuación de segundo grado en *h* que exige para que sus raíces sean racionales que la expresión $\frac{1}{2}axy + \frac{1}{4}x^2$ sea un cuadrado perfecto; como lo debe ser, por la segunda ecuación $x^2 + y^2$ sea así un sistema de "doble ecuación" que se le presenta también en otros problemas. Si $y = kx$ el sistema es $\frac{1}{2}ak + \frac{1}{4} = u^2$; $1 + k^2 = v^2$. Restando la diferencia de cuadrados es igual a un producto, de ahí fácilmente la solución particular $u = \frac{1}{2}a$ $(\frac{7}{2})$ y $k = (a^2 - 1) : 2^2$ $(\frac{24}{7})$ de ahí que el triángulo es semejante a uno de los lados 7, 24 y 25. De acuerdo con la primera ecuación el factor de proporcionalidad es $\frac{1}{4}$ y el triángulo buscado es de catetos $\frac{7}{4}$ y 6 y de hipotenusa $\frac{25}{4}$. Habría que decir que ésta es una solución, pues el análisis del problema revela una segunda solución racional; $x = \frac{24}{7}$; $y = \frac{25}{12}$; $z = \frac{337}{84}$, pero es claro que Diofanto no buscaba sino la solución que había pensado de antemano al proponer el problema.

LA ÉPOCA MEDIEVAL

La temprana Edad Media

En el capítulo anterior reseñamos el desarrollo de la matemática griega, o elaborada por griegos, durante el período grecorromano, periodo en el cual la matemática en ese sentido no tuvo cabida en el mundo romano.

En las enciclopedias a las que eran afectos los polígrafos romanos, no figuraban sino las nociones matemáticas destinadas a las aplicaciones, ya fueran los conocimientos aritméticos útiles para satisfacer las necesidades de la vida diaria, las exigencias de las transacciones comerciales o, a lo sumo, alguna cuestión tribunalicia; ya fueran los conocimientos geométricos que requería la agrimensura y la agricultura.

Es conocido por las contadas ocasiones en que aún se utiliza, el sistema de numeración de los romanos, de base 10 y no posicional y en el cual en la numeración hablada el 20 ocupa un lugar especial, mientras que en la numeración escrita se intercalan las unidades intermedias 5, 50, 500. Una característica del sistema es el procedimiento sustractivo para abreviar la escritura de ciertos números:
IX = 9, XL = 40 (el IV = 4 parece ser algo posterior), aunque no es original, pues se han encontrado ejemplos entre los babilonios. Los romanos utilizaron fracciones de numerador unitario y denominadores 12 o múltiplos de 12, en conexión con el sistema de medidas y de monedas.

Para operar, utilizaban ya el cálculo digital, ya prontuarios o tablas de cuentas hechas o el ábaco, instrumento del cual se poseen ejemplares que permitían calcular con números grandes y fracciones.

En cuanto a los conocimientos geométricos que aparecen en algunas enciclopedias de los romanos se limitan a unas cuantas reglas empíricas. (l)

Cierta reacción en favor de los antiguos textos griegos se advierte en los escritores latinos después de la caída del Imperio de Occidente. Así en Marciano Capella, de mediados del siglo V, autor

de una obra en prosa y en verso: *De las nupcias de Filología y Mercurio y de las siete artes liberales*, en nueve libros, precursora de las enciclopedias medievales en la que se ocupa de esas artes, es decir, el *trivium*: gramática, dialéctica y retórica, y el *quadrivium*: geometría, aritmética, astronomía y música. En este escrito que, como otros de esta época, gozaron de estima y difusión durante la Edad Media, la geometría se reduce a las definiciones de los *Elementos* con el enunciado de su primer problema, y la aritmética a unas cuantas nociones de carácter neopitagórico.

Algo posteriores a Capella, y de comienzos y mediados del siglo VI, son contemporáneos Boecio y Casiodoro. Severino Boecio, más conocido como filósofo, dedicó parte de su producción a la traducción, recopilación o composición de manuales relacionados con el *quadrivium* (ya aludimos a su compilación de la Aritmética de Nicómaco), obras que sirvieron para mantener vivas ciertas nociones del saber antiguo durante los tiempos medievales, por la difusión que alcanzaron esos escritos.

También se ocupó de las artes liberales Casiodoro en un escrito, muy citado en la Edad Media, donde aparece una exposición del saber pagano necesario para la comprensión de la Biblia; aunque el mérito mayor de Casiodoro fue el de haber sido el iniciador de la costumbre de incitar a los monjes de su convento al estudio, imponiéndoles la obligación de copiar antiguos textos, costumbre que, al mantenerse en los tiempos posteriores, permitió conservar buena parte de la literatura antigua.

Ya mencionamos el *Código arceriano* de estos tiempos, con su interesante aporte aritmético, aunque a su lado figura un error grosero, que aparece también en escritos ulteriores, proveniente de confundir el área de un polígono con el número poligonal correspondiente.

Otro autor enciclopédico, cuya obra *Etimologías* sirvió de modelo de las futuras enciclopedias medievales San Isidoro, obispo de Sevilla desde 601, en la que considera todas las disciplinas de su época, desde astronomía a medicina con definiciones y clasificaciones.

El próximo nombre ya no pertenece a la cuenca del Mediterráneo, es el del benedictino inglés *Beda el Venerable*, que en su obra enciclopédica *De natura rerum* mejora los conocimientos

de Isidoro con las aportaciones de Plinio, que Isidoro no conoce. En especial, cabe mencionar a Beda por un escrito sobre el cálculo digital, aunque más importante ha sido su influencia que, a la larga, ejerció sobre Alcuino de York, uno de los maestros a los que acudió Carlomagno para mejorar el nivel cultural de su administración y de su clero. Aunque la labor más importante y valiosa de Beda fue el esfuerzo educativo, se le deben varios escritos, entre ellos una colección de problemas aritméticos y geométricos, "para desarrollar el ingenio de los jóvenes". En esa colección figuran los clásicos problemas de matemática recreativa: el de los 100 pájaros, de los móviles, de las canillas que llenan un tanque, etcétera; además cuestiones de números, por ejemplo, habla acerca de los números perfectos, y da fórmulas aproximadas para las áreas. Entre esos problemas figura el de aquel testador romano que al morir, cuando su esposa está por dar a luz, disponiendo la distinta manera en que debe repartirse la herencia según el sexo del hijo a nacer. Nace un par de mellizos de distinto sexo ¿cómo ha de repartirse la herencia?

El escaso valor científico de estos problemas muestra el bajo nivel que había alcanzado la matemática en el "renacimiento carolingio” que se había iniciado con Alcuino. Sin embargo, con la muerte de Carlomagno murió también aquel "renacimiento" y el nivel matemático descendió aún más, tal como lo revela una correspondencia entre dos "matemáticos" de comienzos del siglo XI, en la que vanamente se trata de probar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, sugiriendo finalmente una demostración experimental recortando ángulos de pergamino.

Pero ya asomaba un nuevo despertar favorecido por los vientos que venían del Oriente. El aporte oriental a la matemática, durante el primer milenio de nuestra era, proviene de tres centros culturales distintos: chino, hindú y árabe, y distintos fueron también su valor y su influencia.

Aunque actualmente se está conociendo cada vez más y mejor la antigua ciencia china puede decirse que la matemática china es la que ejerció menor influencia sobre la futura matemática occidental. (2) En cambio, se deben a la matemática hindú aportaciones originales importantes, así como una notable influencia sobre la ciencia árabe y, por intermedio de ésta, sobre la occidental.

Una característica de la ciencia hindú es la dificultad que ofrece la ubicación de sus obras en el tiempo, en vista de la carencia de una cronología precisa, de la escasez de la documentación y las discrepancias que esos factores provocan en los historiadores. Ha de agregarse que por el hecho de haber sido en la India siempre muy vigorosa la tradición oral, la escritura se adoptó en forma amplia en fecha tardía, digamos hacia el primer milenio a. C., de ahí que sólo desde esta época se tengan datos concretos acerca del saber hindú.

Aunque la influencia de la matemática hindú se ejercerá en especial en los campos de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría, sus primeras manifestaciones son de índole geométrica, y han de verse en los rituales brahmánicos, donde aparecen nociones destinadas a la ubicación y forma de los altares de los sacrificios. Pertenecen a una época comprendida entre los siglos VIII y II a. C. y en ellos figuran reglas para la construcción de los altares y en un complemento: el *Sulvasutra*, se dan las reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos, relaciones entre la diagonal y el lado de un cuadrado, y equivalencias entre el rectángulo, el cuadrado y el círculo. (3)

Estas construcciones geométricas ya no figuran en las obras que aparecen en el segundo período hindú de producción matemática: es el periodo astronómico, que transcurre entre los siglos IV y XlI de nuestra era. Las obras más antiguas de este período son las *Siddhanta*, obras de carácter astronómico, en las que se advierte la influencia griega. Se conocen, por lo menos de nombre, cinco *Siddhanta*, de las cuales se posee el texto de una y comentarios de otra. La importancia matemática, además de su influencia en el mundo islámico, estriba en el hecho de que en las *Siddhanta* aparecen por primera vez las funciones circulares, por lo menos el seno y el coseno (bajo la forma de seno verso), mediante una tabla en la que se advierte la ventaja de medir los arcos no por sus cuerdas, como lo hace Ptolomeo en su *Almagesto*, sino por la semicuerda del arco doble (seno) y por la flecha del arco doble (seno verso).

Un mayor desarrollo de estos conceptos aparece en algunos matemáticos posteriores, ya en el primero, en orden cronológico, de los grandes matemáticos: Aryabhata, nacido probablemente en

476 y en Varahamihira, del siglo VI, que en una de sus obras resume una de las antiguas *Siddhanta*. Aryabhata es autor de un tratado astronómico-matemático en versos: *Aryabhatiyam*, dividido en cuatro capítulos, de los cuales el más importante, desde el punto de vista matemático, es el segundo que comprende, además de otras cuestiones, una tabla de senos y ejemplos de análisis indeterminado de primer grado, tema este último que constituye su contribución más original. Mientras que en Diofanto el objeto de su análisis indeterminado de primer grado era hallar soluciones racionales positivas, en los hindúes ese análisis adquiere el significado actual, pues se propone buscar soluciones enteras de ecuaciones lineales de la forma $a x + b y = c$, con a, b, c números enteros.(4)

Un segundo matemático hindú de este periodo es Brahmagupta, del siglo VII, cuyo tratado astronómico *Siddhanta* dedica unos capítulos a la matemática con algunas contribuciones nuevas: valor aproximado de π, ecuaciones indeterminadas de segundo grado, y en especial propiedades de los cuadriláteros inscriptibles, en la que se advierte la influencia griega, pero que constituyen sin duda la contribución más interesante de Brahmagupta. (5)

Empero, el aporte oriental más notable de estos primeros tiempos medievales provino del mundo árabe del Islam, movimiento que se inicia con la hégira de Mahoma de 622 y que ha desempeñado un papel singular en el desarrollo de la ciencia de este periodo.

Ese movimiento comprende un primer período de conquistas bélicas y de expansión política que culmina a mediados del siglo VIII, cuando los árabes están en posesión de una extensión territorial mayor que la del imperio romano en sus mejores tiempos, que abarca desde Asia Central hasta los Pirineos a través de África del Norte y gran parte de Asia occidental.

A partir del siglo VIII la fisonomía del Islam cambia. Por un lado, el levantamiento del sitio de Constantinopla, la batalla de Poitiers, que frena la expansión árabe en Europa, y la batalla de Talas que no obstante ser una victoria para los árabes, éstos no prosiguen su avance, detienen las conquistas bélicas; por el otro, la creación del califato de Córdoba y la división del califato oriental en los de Bagdad y del Cairo, acentúan las disensiones políticas y religiosas

internas. A estas circunstancias, en cierto modo extrínsecas, se agregan factores intrínsecos:

a) el hecho de que el islamismo puso a los árabes en contacto con pueblos y regiones que habían sido centros de antiguas culturas, como Mesopotamia, o que lo eran en la época de la conquista árabe, como Persia, Siria, India, o que conservaban restos de la cultura helénica o romana, como España, Cirenaica, Egipto;

b) la tolerancia que en general los conquistadores mostraron hacia los habitantes de las regiones sometidas, en especial hacia aquellos que tenían "libros": cristianos, judíos, persas;

c) la atmósfera de libre discusión y libertad de opinión que había nacido con las polémicas religiosas y teológicas surgidas en el seno del Islam, que indirectamente venían a favorecer el intercambio y desarrollo científico; y

d) la existencia de cortes árabes que, a la manera de las persas, protegían y fomentaban el arte y las ciencias.

Se comprenderá así como a fines del siglo VIII el mundo árabe está en posesión de todos los elementos necesarios para un desarrollo científico que proseguirá durante varios siglos y que, desde el punto de vista de la matemática, reseñaremos a continuación.

La primera manifestación de la actividad científica de los árabes se pone de relieve en las traducciones al árabe de obras hindúes y griegas. La traducción de obras griegas había sido precedida por las versiones al siríaco, realizadas en Siria y Mesopotamia. Entre los escritores sirios cabe mencionar al obispo Severo Seboth, de fines del siglo VII, que tradujo las *Analíticas* de Aristóteles y escribió sobre temas astronómicos, siendo el primer escritor que, fuera de la India, menciona las cifras hindúes. Este hecho nos lleva a hablar de esas cifras y por tanto del sistema de numeración decimal y posicional actualmente en uso en Occidente.

Su historia es bastante complicada y aún no muy clara, aunque el origen hindú parece indudable. Esa fantasía exuberante que revelan las construcciones y relieves hindúes y que en los problemas aritméticos se pone de manifiesto en la presencia de grandes números, pudo ser una causa, consciente o no, que condujo a buscar un sistema de numeración que hiciera factible su manipulación. Siguiendo a Van der Waerden, su historia puede

resumirse así: Hacia la época del rey Asoka (siglo III a. C.) estaba en uso un sistema llamado Brahmi, no posicional y por tanto sin el cero, con nueve signos, que mostraban cierta semejanza con las futuras "cifras arábigas", junto con signos especiales para las decenas, centenas y millares. Mientras el nombre de estas cifras se mantiene en el lenguaje escrito sus símbolos se modifican en la escritura numérica, y en las más antiguas tablas de senos (s. VI) y en las inscripciones epigráficas ya aparece el sistema posicional decimal con el cero. Hay que agregar que al principio este sistema fue adoptado dentro del tono poético de la matemática hindú, utilizando palabras en lugar de signos, y escribiendo el número en orden inverso del actual. La posible influencia aportada por el conocimiento del sistema sexagesimal de los astrónomos griegos, que ya habían introducido el cero y escribiendo los números de mayor a menor, facilitó probablemente esta modificación también en el sistema hindú, y hacia el 500 el sistema es el actual.

El sistema hindú penetró en Occidente por caminos distintos y en diferentes épocas, con el cero y sin el cero, pero será por intermedio de los árabes que se conocerá en Occidente en la forma actual, de ahí el nombre de cifras arábigas que se ha dado a los signos hindúes.

Es probable que los árabes se pusieran en contacto con estas cifras en el siglo VIII cuando tradujeron las *Siddhanta*, que figuran entre las primeras obras vinculadas con la matemática que se tradujeron al árabe. Cabe advertir que antes de Mahoma los árabes no tenían cifras. Más tarde, adoptaron los sistemas de numeración de algunos de los pueblos conquistados, mientras gradualmente fundaban un sistema propio a la manera griega y hebrea fundado sobre el uso de las letras del alfabeto.

Este sistema, a su vez, fue reemplazado por el de las cifras hindúes, que mostraron su superioridad, tanto en las transacciones comerciales cuanto en las operaciones aritméticas. Sólo en obras astronómicas, en especial en las traducidas del griego, se continuó usando el sistema alfabético, al traducir también los números en griego, hecho caso en el cual la desventaja del sistema alfabético no era muy pronunciada.

A partir del siglo IX comienzan a aparecer las traducciones al árabe de las obras griegas y poco después con comentarios. Las

primeras versiones árabes de obras matemáticas griegas fueron las de Al-Haggag, que vivió en Bagdad entre 786 y 813, a quien se debe la traducción de los primeros seis libros de los *Elementos* y una re traducción del *Almagesto* del siríaco. Las traducciones de los *Elementos* por Al-Haggag, pues hizo dos, fueron comentadas en forma interesante por Al-Nayrizi (el Anaritius de los latinos), que murió en 922.

Más importante, aunque menos difundida, fue la versión de los *Elementos* de Ishaq b. Hunayn (muerto en 910/11), miembro de una importante escuela de traductores que floreció en el siglo IX y de la cual el jefe fue su padre Hunayn b. Ishaq (el Johannitius de los latinos), a su vez prolífico escritor y traductor del griego y del siríaco. Ishaq b. Hunayn tradujo además escritos de Arquímedes, Menelao, Ptolomeo, Hipsicles y Autolico.

Su versión de los *Elementos* fue a su vez revisada por Tabit b. Qurra (827-901), que además de ser uno de los grandes traductores, fue también un investigador original. Se le deben traducciones de Apolonio, Arquímedes, Eutocio, Teodosio y otros. Es importante su versión de los libros quinto a séptimo de *Cónicas* de Apolonio, pues sólo por medio de esa versión se conocen esos libros. Los cuatro primeros habían sido traducidos por Hilal AI-Himsi (muerto en 883) y la traducción de los siete libros fue revisada por Abu-al-Fath de fines del siglo X.

Cabe agregar que tanto Iohannitius como Tabit b.Qurra estaban al servicio de una de esas familias que, a la par de los califas, protegían a la ciencia y a los sabios: la familia de los tres hermanos Banu Musa, dos de los cuales se dedicaron a la matemática y el tercero a la mecánica.

Otro traductor de este periodo es Qusta b. Luqa (muerto hacia 912), que tradujo a Diofanto, Teodosio, Autolico y Herón, de éste la *Mecánica*. Al siglo X pertenecen Abu Uthman, a quien se debe la traducción del libro décimo de los *Elementos* y de los comentarios de Pappus a este libro, comentarios éstos de los cuales se posee esta versión árabe; y Abu Al-Waffa, astrónomo matemático a quien, además de traducciones, se deben comentarios de Euclides, Diofanto y Ptolomeo.

Con sus traducciones los árabes entraron en posesión de una gran parte de la matemática griega e hindú, que a comienzos del siglo IX comenzó a dar sus frutos.

La primera figura cronológicamente, pero muy importante, de la matemática árabe es el geógrafo, astrónomo y matemático Al-Khuwarizmi, de cuya vida poco se sabe, si se exceptúa que fue bibliotecario del califa Al-Mamun, que reinó entre 813 a 833. En su obra matemática hay influencias griegas e hindúes y tanto en el sentido de Euclides como en el de Diofanto habiéndose advertido últimamente también influencias de la matemática de los babilonios. A su vez, la obra de Al-Khuwarizmi ha ejercido una notable influencia no sólo en la ciencia del Islam, sino también y muy importante, en la ciencia cristiana occidental.

Se le debe una *Aritmética*, que no se ha conservado en su texto árabe pero sí en su versión latina *Algoritmi de número indorum* reelaborada como *Liber algorismi de práctica arithmetica* por Juan de Sevilla en el siglo XII. También es probable que sea de Al-Khuwarizmi un escrito en cinco libros sobre cuestiones de aritmética y de matemática aplicada a la astronomía, cuya versión latina es *Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a mogistro A*. (¿Adelardo de Bath?) *compositus.*

En todos estos títulos aparece traducido y deformado el nombre del autor; deformación de la que más tarde surgió el término "algoritmo" con la acepción técnica actual. La *Aritmética* de Al-Khuwarizmi, contribuyó a la difusión en el mundo árabe de las cifras hindúes y del uso del cero; como en textos posteriores contiene las reglas de las cuatro operaciones con enteros y fracciones y una serie de problemas resueltos con la regla de falsa posición.

Pero, sin duda, el libro más importante de Al-Khuwarizmi, y que ha dado el nombre a una rama de la matemática es *Hisab al-jabr wa-al-muqabala* de traducción no fácil, pero cuyo término *al-jabar* dio luego nacimiento a nuestro vocablo *álgebra.*

Para comprender el significado de los términos que aparecen en el título de esa obra hay que tener presente que los árabes operaron siempre con ecuaciones de coeficientes enteros y positivos de manera que, después de planteada la ecuación de acuerdo con los datos del problema, la primera transformación era

"restablecer o restaurar el orden" llamamos: pasaje de un miembro a otro mediante la operación que actualmente correspondería al *al-jabar* árabe (en castellano antiguo, por ejemplo, en el *Quijote* se llama "algebrista" a quien recompone los huesos descoyuntados). También aquella restauración significa suprimir los denominadores en el caso de aparecer coeficientes fraccionarios. Pero aun la ecuación puede necesitar otras operaciones: eliminación de factores comunes en los coeficientes (operación que llamaban al-hatt o eliminación en ambos miembros de términos iguales, nuestra reducción de términos semejantes), que sería la *wa-al-muqabala.*

La exigencia de los coeficientes positivos aumenta el número de casos de ecuaciones de segundo grado. Así Al-Khuwarizmi considera seis casos posibles de ecuaciones cuadráticas completas o incompletas, apareciendo como ejemplos de las ecuaciones completas

$$x^2 + 10x = 39\ ;\ x^2 + 21 = 10x\ ;\ x^2 = 3x + 4$$

ejemplos que aparecerán durante siglos en la literatura algebraica posterior. A la resolución algebraica, según la regla actual Al-Khuwarizmi agrega comprobaciones geométricas.(6) El libro contiene además una parte puramente geométrica bastante floja (teorema de Pitágoras en el caso particular del triángulo isósceles, valores aproximados de π ya conocidos) y finalmente una colección de problemas que, según el prefacio constituían el objeto del libro, relativos en general a problemas de herencia, legados, particiones, problemas de aritmética comercial y de geometría práctica. Etcétera.

El álgebra de Al-Khuwarizmi es retórica, designa a la incógnita con la palabra "cosa", nombre que más tarde pasó a Occidente. Se debe por último a Al-Khuwarizmi una geometría y tablas astronómicas, donde aparece por primera vez en árabe la función seno. Esas tablas fueron publicadas y corregidas por Maslama hispanoárabe muerto en 1007. Es posible que las restantes funciones circulares que en ellas aparecen fueran introducidas por Maslama.

Contemporáneo de Al-Khuwarizmi fue Tabit B. Qurra, ya citado como traductor aunque fue también un investigador cuyos trabajos

se relacionan especialmente con la matemática de los griegos: se ocupó del escrito de Arquímedes *De los esferoides y de los conoides*, de los teoremas de Menelao que pasaron por esta vía a la latinidad con el nombre de *"regula sex quantitatum",* aunque sin duda su contribución más original es en teoría de números, pues se debe a Tabit un método para hallar números amigos, es decir, pares de números cada uno de los cuales es suma de los divisores del otro; método que hasta ahora es el único que se conoce para tal determinación.(7)

Algo posterior a los dos matemáticos anteriores es Abu Kamil de los siglos IX y X algebrista que perfeccionó la obra de Al-Khuwarizmi y ejerció influencia en matemáticos árabes y latinos, en especial en Leonardo Pisano. Se le debe, además, de su *Álgebra:* un escrito sobre problemas de análisis indeterminado; un escrito donde trata algebraicamente problemas geométricos de inscripción y circunscripción de pentágonos y decágonos; y finalmente se le atribuye una obra, que más tarde habría sido vertida al hebreo por el judío español Aben Ezra del siglo XII y luego al latín como *Sobre los aumentos y disminuciones* que trata del procedimiento de falsa posición para resolver las ecuaciones lineales con una incógnita mediante uno o dos ensayos. De ahí los nombres de *regula falsi o de regula duorum falsorum* con que las designaron los escritores latinos, reglas que no son sino la solución de la ecuación lineal por el método de interpolación lineal, exacto en este caso. (8)

En el Islam los astrónomos contribuyeron en gran medida al progreso de la matemática. En cierto sentido puede decirse que entre los árabes no hay matemáticos puros, ante todo son astrónomos. Ya desde la época de la expansión árabe las prescripciones religiosas plantearon una serie de cuestiones astronómicas: problemas de orientación y de determinación de fechas y de horas que exigieron la instalación de observatorios y el perfeccionamiento de tablas e instrumentos, así como el estudio e investigación de las cuestiones astronómicas y matemáticas conexas.

Entre los astrónomos árabes que influyeron en el progreso de la matemática citemos a Al-Mahani muerto hacia 874, que además de traducir obras de Euclides y de Arquímedes, fue el primero en

poner en ecuación (de tercer grado) el problema arquimediano de dividir una esfera en dos segmentos de razón dada.

Pero la contribución más importante de los astrónomos fue la introducción y ampliación de las funciones circulares, así como el perfeccionamiento de sus tablas; entre los astrónomos que se ocuparon del tema cabe recordar a Habash contemporáneo del anterior, Al-Baltani, el Albategnius de los latinos, de los siglos IX y X y Abu-al-Wafa del siglo X. Es a estos astrónomos a quienes se debe la ampliación de las funciones circulares a las seis actualmente en uso y el conocimiento de sus primeras relaciones.

Nuestra palabra seno, del latín *sinus*, proviene de una curiosa traducción: los hindúes designaban a ese segmento con la palabra exacta "semicuerda" o abreviadamente "cuerda", que en sánscrito, en la forma de grupo de consonantes sin vocales, no tenían ningún sentido para los árabes, quienes por razones fonéticas la sustituyeron por la palabra que en su propio idioma significaba seno (pecho) o en forma figurada golfo o ensenada. Las funciones "tangente" y "cotangente" surgieron al tabularse las sombras (*umbra versa* y *umbra recta* en latín), proyectadas por el sol en sus distintas alturas, de un gnomon horizontal o vertical, respectivamente. En cuanto a la "secante" y "cosecante", medidas de las distancias entre el extremo del gnomon y su sombra, fueron llamadas *transversales* de la sombra.

En particular se debe a Al-Battani el teorema del coseno para los triángulos esféricos que no figuraba en el *Almagesto*; por su parte, se debe a Abu Al-Wafa un perfeccionamiento del método de Ptolomeo para la construcción de su tabla de cuerdas, ahora de senos, llegando a dar sen 30° con 9 decimales exactos. (9) Se debe además a Abu Al-Wafa un libro sobre construcciones geométricas con una serie de problemas resueltos con una sola abertura de compás, tipo de cuestiones que estarán de moda en Europa varios siglos después.

Las contribuciones matemáticas de los sabios árabes más renombrados: Al-Biruni, Avicena y Alhazen, pertenecen al siguiente período medieval.

Notas complementarias

(1) La geometría de los romanos. En las enciclopedias romanas, además de las reglas para la determinación exacta del área del cuadrado, del rectángulo y del triángulo rectángulo se encuentra una fórmula aproximada para el área del triángulo equilátero que supone tomar para $\sqrt{3}$ el valor bastante aproximado $^{26}/_{15}$; otra para los cuadriláteros no rectángulos, que no es sino la antigua fórmula egipcia que adopta como área el producto de las dos semisumas de los lados opuestos; y una para el área del círculo tomando para π el valor de Arquímedes $^{22}/_{7}$. Agreguemos que los agrimensores romanos admitían como bastante exacta la determinación del área de una ciudad de forma irregular, sin más que medir su perímetro.

(2) Lo matemática china. En verdad, la historia de China comienza a fines del siglo III a. C., cuando se unifica y nace el imperio chino, cuyo primer emperador ordena la "quema de los libros", con excepción de los de agricultura, de medicina y de adivinación. Aunque tal destrucción no fue completa hace de todos modos muy difícil la investigación del saber chino anterior a esa época. Por lo demás, China no estuvo totalmente aislada de otros pueblos orientales y hasta de Occidente. El comercio de la seda con países occidentales es muy antiguo y las relaciones con la India, y más tarde con los árabes, fueron continuas: el budismo es introducido por lo menos oficialmente, en China en el siglo I y las relaciones económicas y políticas con los árabes datan del siglo VII.

Por otra parte, los más antiguos documentos existentes revelan que la matemática china no difiere esencialmente en lo que se refiere al nivel de los conocimientos de la matemática de los pueblos orientales: un sistema de numeración aditivo mediante rayas horizontales y verticales, proveniente de un antiguo cálculo con varillas de bambú; y el empleo del ábaco, cuya mención más antigua aparece en un tratado aritmético de fines del siglo II; fórmulas empíricas y aproximadas para áreas y volúmenes de figuras simples; y colección de problemas, algunos típicos, y como

dato interesante la presencia, que parece de origen inmemorial de cuadrados mágicos.

A partir de los primeros siglos cristianos se tienen algunos datos más concretos: en el siglo III Liu Hui compone un escrito aritmético con problemas, algunos de los cuales implican cierta noción algebraica; se le debe además un comentario al tratado clásico *Las reglas de cálculo en nueve partes*, compuesto según es tradicional, en el siglo II a. C, sobre la base de escritos más antiguos.

Debemos llegar a fines de la alta Edad Media para encontrar el nombre de un matemático chino, importante: Ch'in Chiu-Shao, autor de *las nueve secciones de matemática*, que contiene 81 problemas de análisis indeterminado y ecuaciones algebraicas de grado superior. Dos características algebraicas distinguen este tratado: por un lado la notación distinguiendo con el color rojo y negro los coeficientes positivos y negativos respectivamente y el cero con un circulito (otro matemático independiente de Ch'in, en lugar de colores diferenció los coeficientes cruzando con una diagonal los coeficientes negativos); y por el otro, el método numérico de resolución de ecuaciones que en esencia coincide con el método hoy llamado de Ruffini-Horner.

También del siglo XIII es Yang Hui, quien en un *Análisis de las reglas aritméticas* hace conocer, por primera vez en la literatura matemática, la expresión de la suma de los primeros n números que los pitagóricos llamaron triangulares, es decir, con nuestros símbolos:

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

mientras que del siglo siguiente es Chu Shih-Chieh, considerado uno de los grandes matemáticos chinos, en cuyo tratado *El precioso espejo de los cuatro elementos* expone, como algo no original, un diagrama numérico, que no es sino nuestro "triángulo aritmético", hasta la novena línea. Agreguemos que mediante el tratado de Chu Shih-Chieh se introdujo el álgebra china en Japón.

Para terminar con la matemática en China, recordemos que en el siglo XVI los misioneros jesuitas introducen la matemática occidental en Extremo Oriente.

(3) Las construcciones del Sulvasutra. Además de algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras para transformar un rectángulo en un cuadrado equivalente, aparece en el *Sulvasutra* una expresión racional de la diagonal del cuadrado en función del lado que equivale a la igualdad aproximada que proporciona un valor exacto hasta la quinta decimal.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Se utiliza luego este valor para resolver aproximadamente el problema inverso de la cuadratura del círculo: obtener el diámetro de un círculo equivalente a un cuadrado dado. La solución hindú consiste en tomar como diámetro el lado del cuadrado más el tercio de la diferencia entre la diagonal y el lado, solución que daría para π el valor poco aproximado de 3,0888. Más aproximado es el valor $3\ {}^{1}/_{8}$ que aparece en otro problema (valor que por lo demás era conocido por los babilonios), al tomar como diámetro del círculo los ${}^{4}/_{5}$ de la diagonal del cuadrado equivalente. Menos aproximadas aún son las reglas que dan, para el lado del cuadrado, fracciones como ${}^{7}/_{8}$ o ${}^{13}/_{15}$, del diámetro del círculo equivalente.

(4) Las contribuciones de Aryabhata. En cuanto al análisis indeterminado de Aryabhata, he aquí la reconstrucción, de acuerdo con un comentarista hindú, del proceso seguido para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas: $8x - 29y = 4$; $17x - 45z = 7$ con números enteros. El método que llamaban de "pulverización", no es sino nuestro método de cambios de variable, a fin de lograr ecuaciones con coeficientes cómodos como para que una primera solución "salte a la vista"; tal es el camino que revelan las operaciones que se van efectuando. Mediante ese proceso se llega a una primera solución (mínima) $x = 15, y = 4$ para la primera ecuación y $x = 11, y = 4$ para la segunda. De acuerdo con nuestro simbolismo, esas soluciones señalan como solución, general de cada ecuación, tomada aisladamente, para la variable común x : $x = 15 + 29u$; $x = 11 + 45v$ de donde por igualación resulta una nueva ecuación lineal $45v - 29u = 4$ que, vuelta a "pulverizar", da como

nueva solución mínima *u = 34; v = 22* y de ahí en definitiva la solución mínima del sistema: *x = 1001 ; y = 276 ; z = 378*, que aparece en el comentario citado.

Respecto de la construcción de la tabla de senos. Aryabhata adopta para π el valor 3 $^{177}/_{1250}$ (= 3,1416), conocido por Ptolomeo, y como unidad de longitud el minuto de arco, de manera que resulta para su circunferencia un radio de 3438 unidades (el número de minutos de la vuelta dividido por π). Divide ahora el cuadrante en 24 arcos. Cada uno de los cuales será entonces de 225 unidades y supone que este arco mínimo es igual a su seno, suposición que implica un error menor que una unidad. Partiendo del seno de este arco mínimo, que llamaremos a, los siguientes se calculan por recurrencia mediante una fórmula aproximada que mediante nuestros símbolos sería

$$sen\ (n+1)a = 2sen\ na - sen\ (n-1)a - \frac{sen\ na}{r\ sen\ a}$$

siendo *r* el radio, expresión que presupone *1 - cos a* = $^{1}/_{450}$ expresión exacta hasta la cuarta decimal, hecho que explica que redondeando las unidades y utilizando los valores conocidos de senos de arcos notables, Aryabhata llegue a encontrar para el sen 90° un valor igual al radio.

(5) Las contribuciones de Brahmagupta. Una contribución geométrica de la matemática hindú es la generalización de la llamada "fórmula de Herón", aplicable a los cuadriláteros inscriptibles, que aparece en los escritos de Brahmagupta y que expresada con nuestros símbolos de como área S de un cuadrilátero inscriptible de lados *a, b, c, d* y semiperímetro

$$p: s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Brahmagupta reconoce además que esa fórmula puede aplicarse a los triángulos anulando uno de los lados del cuadrilátero. Aunque el texto no es muy claro, parece que Brahmagupta no ignoraba que esta fórmula era aplicable sólo a los cuadriláteros inscriptibles; Baskhara cinco siglos después no advierte esta limitación.

También revela Brahmagupta el conocimiento de las expresiones que permiten obtener las diagonales de un

cuadrilátero inscriptibles conociendo los lados y que hoy escribiríamos si esas diagonales son x e y :

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \ ; \ y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

Más interesante, aunque menos original, es la construcción de un cuadrilátero inscriptible de lados, diagonales y área conmensurables y además de diagonales perpendiculares entre sí. Para ello acude a Diofanto, con el mismo ejemplo numérico, en el problema que hemos mencionado (de los cuatro números, cada uno de los cuales, sumado al cuadrado de su suma, dan cuadrados); obtiene así cuatro triángulos rectángulos de lados enteros, semejantes dos a dos y con catetos iguales también dos a dos, que al reunirlos haciendo coincidir el vértice del ángulo recto y los catetos iguales, configuran un cuadrilátero inscriptible en las condiciones dadas. (Si se adoptaran los triángulos de lados 3, 4, 5 y 5, 12, 13, los lados del cuadrilátero serían 25, 52, 60, 39 las diagonales perpendiculares entre sí 63 y 56 y el área 1764.)

(6) La ecuación de segundo grado en Al-Khuwarizmi. En su escrito dice Al-Khuwarizmi: "Los números que se presentan en el cálculo mediante la restauración y la reducción son de tres clases, a decir: raíces, cuadrados y números simples, que no se refieren ni a las raíces ni a los cuadrados… Un número que pertenece a una de esas tres clases puede ser igual a uno de los números de las otras dos, por ejemplo, cuadrados igual a raíces; cuadrados igual a números, raíces igual a números". Se hace así referencia a los tres casos de ecuaciones incompletas $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$ casos que se reducen simplemente a la extracción de una raíz o a una ecuación de primer grado.

Pasa luego a los tres casos posibles de ecuaciones completas de segundo grado de coeficientes positivos, agregando: "Encuentro que esas tres especies de números pueden combinarse entre sí y dar lugar a tres tipos compuestos que son: cuadrados y raíces igual a números; cuadrados y números igual a raíces; cuadrados igual a raíces y números", o lo que es lo mismo, distingue los tres casos de ecuaciones

$$x^2 + px = q\ ;\ x^2 + q = px\ ;\ x^2 = px + q$$

Para resolver el primer caso, ateniéndose al ejemplo numérico: ¿Cuál es el cuadrado que sumado a diez raíces da el número 39? Dice: “Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número que es 8 y le restas la mitad de las raíces 5 y obtienes 3, que es el valor buscado". Se advierte que la regla no es sino nuestra resolvente expuesta en forma retórica. Cabe agregar que en un segundo ejemplo de este caso, donde el coeficiente de los cuadrados no es la unidad, señala que para aplicar la regla anterior debe hacerse ese coeficiente la unidad, dividiendo por él todo los coeficientes.

El segundo caso es interesante, pues la ecuación tiene dos raíces positivas. Con el ejemplo $x^2 + 21 = 10\,x$, dice Al-Khuwarizmi: "Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, multiplicarlo por sí mismo, obtienes 25 al que debes restar los números, en este caso 21, obteniendo 4. Extraes la raíz cuadrada que es 2 y lo restas del número de la mitad de las raíces que era 5 y obtienes 3 que es la solución. Si deseas, puedes también sumar ese valor 2 a la mitad de las raíces que es 5 y obtienes 7, que también es solución. Cuando un problema está dado en esta forma, puedes ensayar con la adición. Si no resulta, es indudable que resultará con la sustracción. Éste es el único caso, en que hay que tomar la mitad de las raíces, y que puede ofrecer solución por adición o por sustracción. Además hay que observar que si en este caso el cuadrado de la mitad de las raíces es menor que los números, no hay solución. Si es igual a esos números, la solución es la mitad de las raíces sin aumentos o disminuciones”.

A c. El tercer caso de ecuación completa no agrega ninguna novedad. A continuación da las comprobaciones geométricas de las reglas aritméticas, pero sólo de los casos “en los que es necesario tomar la mitad de las raíces”, es decir, de las ecuaciones completas.

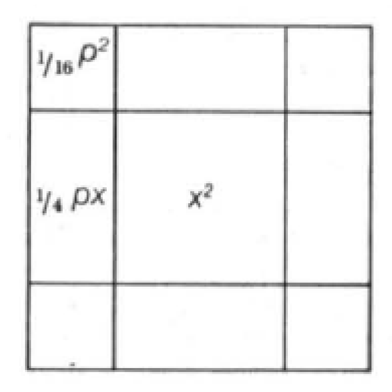


Fig. 21

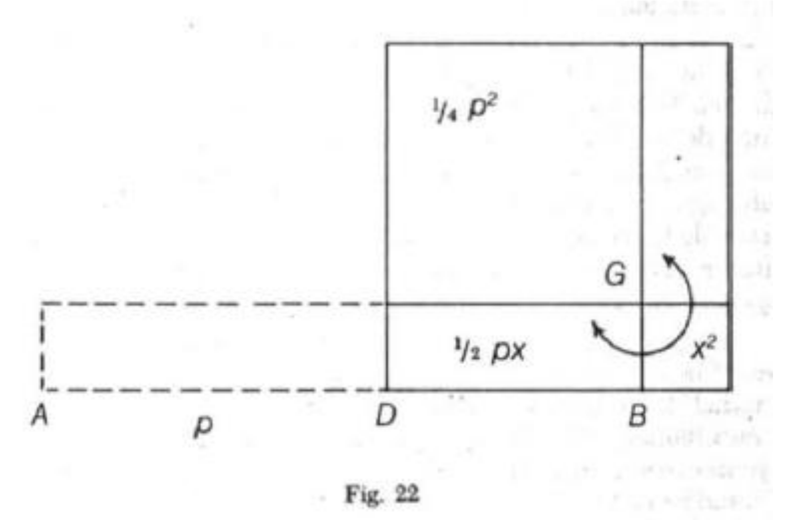


Fig. 22

Para el primer caso, de forma $x^2 + px = 9$ y en el ejemplo $x^2 + 10x = 39$ da dos comprobaciones geométricas. En la primera, supone un cuadrado de lado *x* y, por tanto, de valor x^2 a cada uno de cuyos lados adosa un rectángulo de base *x* y altura *¼ p(* $^5/_2$) el dodecágono así formado tendrá por área

$$x^2 + 4\cdot ¼\, px = x^2 + px = q\ (39);$$

de ahí que si a esa figura se le agregan los cuatro cuadrados de los vértices de área total $4\cdot (1/4p)^2 = 25$ se obtiene un cuadrado de área $¼\, p^2+q(25 +39=64)$ y de lado su raíz.*(8)* Como ese lado es *x + 2(1/4 p) = x + ½ p(x + 5)* y se obtiene finalmente el valor de

$x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} - \frac{1}{2}p$ expresión que justifica la regla aritmética y que en este caso da la solución *x = 3*. Cuyo cuadrado 9 más 10 veces su valor, 30 da el valor de los números: 39.

La segunda comprobación geométrica de este caso es más euclidiana. Ahora adosa a dos lados contiguos del cuadrado de lado *x* rectángulos de base *x* y altura *½ p* con lo cual el "gnomon" de vértice *G* será $x^2 + 2(1/2\, px) = x^2 + px = q$. Al agregarle el cuadrado de lado ½ *p*, es decir, ¼ p^2 se obtiene un cuadrado de lado *x + ½ p*, y de ahí *x.* Si a continuación de uno de los rectángulos adosados se agrega (punteado en la figura) ese mismo rectángulo se ve claramente la reducción del problema a una aplicación de áreas por exceso; sobre el segmento *p* prolongado construir un rectángulo de valor *q* tal que la figura, sobrante sea un cuadrado.

La comprobación geométrica de los otros casos es algo más rebuscada, presentándose también problemas de aplicación de áreas.

(7) Las contribuciones de Tabit b.Qurra. Podemos mencionar en este sentido que es en los escritos de Tabit, donde aparece la demostración del teorema de Pitágoras mediante desplazamientos de triángulos que citamos al referimos a los babilonios. Pero, sin duda, es más original la regla que ofrece para la determinación de números amigos. Esa regla, expuesta, con símbolos actuales es la siguiente: Si para n > 1 los números $a = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$; $b = 3 \cdot 2^n - 1$; $c = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$ son primos los números $A = 2^2 ab$ y $B = 2^n c$ son amigos. Basta comprobar que si S_A *y* S_B representan las sumas de los divisores de *A* y *B* respectivamente se cumple $S_A + A = S_B + B = A + B$ de donde $S_A = B$ *y* $S_B = A$. Para *n = 2* se *tiene a=5; b= 11; c=71* y, por tanto, *A = 4·5·11 = 220 ; B = 4·71 = 284* que ofrecen la pareja más antigua de números amigos. Para *n = 3*, *c* no es primo; para *n = 4* se obtiene como nueva pareja *A = 17296, B = 18416.*

(8) Los métodos de falsa posición. El método de simple falsa posición se aplicaba a los problemas cuya ecuación lineal se escribiría con nuestra notación en la forma *ax = b* obteniendo su solución partiendo de un valor arbitrario x_1 para la incógnita que

llevaría a un valor falso $ax_1 = b_1 \neq b$, pero que una simple regla de tres $x : x_1 = b : b_1$ permite obtener el valor exacto x. Tomemos un ejemplo de un texto árabe: ¿cuál es el número cuyos $^2/_3$ es *5*? Se parte de un valor arbitrario para ese número, en general cómodo para los cálculos, en este caso *3,* cuyos $^2/_3$ es *2* diferente de *5*, pero la regla de tres *x : 3 = 5 : 2* da para *x* el valor exacto *7 ½ .*

El caso de doble falsa posición se aplicaba en cambio a las ecuaciones de la forma

$$ax = b \; ; \; ax + b = c \; ; \; ax + bx = c \; ; \; ax + bx + c = d.$$

Para resolver la ecuación se parte de dos valores arbitrarios de la incógnita: $x_1 \wedge x_2$ calculando los errores respectivos $y_1 \wedge y_2$ como las diferencias de los valores de ambos miembros de las ecuaciones anteriores; operando con esos cuatro números de acuerdo con esquemas empíricos diferentes según el sentido de los errores se llega al valor exacto $x = (x_1 y_2 - x_2 y_1) : (y_2 - y_1)$.

Por ejemplo: ¿cuál es el número que, sumado a sus $^2/_3$ y agregándole la unidad, el resultado es 10? El aritmético árabe parte de los valores $x_1 = 9$; $x_2 = 6$ obteniendo $y_1 = 6$; $y_2 = 1$, y aplicando la regla correspondiente a este caso (los errores de igual signo) obtiene *x = 5 2/5* que es la solución.

(9) La tabla de Abu Al-Waffa. Simplemente para mostrar la pericia de este astrónomo, digamos que para la construcción de su tabla procede a la manera de Ptolomeo, partiendo de los lados del pentágono y triángulo regulares para obtener sen 36° y sen 60°, de donde por sucesivas bisecciones llega a sen 28° 7 1/2" y sen 33° 45", valores con los cuales obtiene el sen 22° 30" sen 22° 30", ángulo que es cuádruplo de la diferencia de los anteriores. Mediante un engorroso juego de desigualdades llega a la igualdad aproximada paro ángulos pequeños

$$sen\,(a + b) = sen\,a + {}^1/_6\,[\,sen\,(a + 3b) - sen\,(a - 3b)\,]$$

evidente sin más que sustituir los senos por los arcos.

Con esa igualdad, y dando los valores a = 28° 7 1/2"; b = 1° 52 1/2" obtiene el seno de 30°, valor mínimo de su tabla, mediante la expresión

$$sen\ 30° = sen\ 28°\ 7\ ^1/_2" + ^1/_6\ (sen\ 33°\ 45" - sen\ 22°\ 30')$$

La alta Edad Media

Ya aludimos al carácter enciclopédico de los científicos árabes, de manera que en todos ellos, en medida mayor o menor, tiene cabida la matemática. En tal sentido cabe mencionar las cuatro grandes figuras de la ciencia árabe, que florecen entre los siglos X y XI; Al-Razi (el Rhazes de los latinos), médico y alquimista a quien se atribuyen escritos matemáticos sin mayor relevancia; Ibn Sina (el Avicena de los latinos), considerado el sabio más famoso del Islam, que se ocupó de alguna cuestión aritmética, como nuestra "regla del 9" que enuncia "según el método hindú" como "la expulsión de los 9", con algunos ejemplos y consecuencias, dice así: Todo número que, dividido por 9 da por resto 1, 4 ó 7, su cubo, dividido por 9, da siempre por resto 1; Al-Biruni (no tiene nombre latinizado, pues no fue traducido) en cuya obra astronómica se incluyen cuestiones matemáticas: construcción de poliedros regulares y tratamiento algebraico de los problemas de tercero y cuarto grado, novedad que aparece con los árabes; (1) y el último de los "cuatro grandes". Ibn Al-Hayttham (el Alhazen de los latinos), importante por su obra en el campo de la óptica a quien se debe, entre otras cuestiones, la determinación del volumen del sólido engendrado por la rotación de un arco de parábola alrededor de un diámetro o de una de sus cuerdas perpendiculares, a la manera griega, lo que lo llevó a utilizar la fórmula de la suma de las cuartas potencias de los números naturales, que no figura en ningún texto griego; además se conoce con el nombre de "problema de Alhazen", una cuestión de óptica, (2) que lleva a una ecuación de cuarto grado que Alhazen resuelve geométricamente.

Entre los matemáticos árabes de Oriente que florecen entre los siglos X a XII cabe mencionar a Ibn Al-Husayn que se ocupó del problema de la duplicación del cubo y de los "tripletes pitagóricos", por ejemplo, demuestra que el número mayor es siempre supuesto primo con los otros dos (múltiplo de 12) más 1 o más 5; aunque

más importantes son las contribuciones de Al-Karhi y Omar Khayyam. Al-Karhi es un algebrista en quien no se advierte la influencia hindú, si se exceptúa "la regla del 9", pues se funda en Euclides y en especial en Diofanto, hecho que aparece también en otros matemáticos árabes y que se ha atribuido a rivalidades de escuela.

Con Al-Karhi hace su aparición en la matemática árabe el análisis indeterminado a la manera de Diofanto, algo mejorado; además se le debe la demostración, al estilo pitagórico, de la suma de los cubos. (3)

Con Omar Khayyam, el celebrado poeta de *los Rubaiyat*, puede decirse que el álgebra árabe llega a su culminación. Como algebrista se le debe una clasificación completa de las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, en la que especifica 25 casos distintos, según el tipo de ecuación completa o incompleta de coeficientes positivos. Mientras resuelve aritméticamente las ecuaciones de primero y de segundo grado, resuelve geométricamente, por medio de intersección de cónicas, las de tercer grado, y es probable que él, o algún discípulo, haya extendido el procedimiento a las ecuaciones de cuarto grado, por lo menos en algún caso particular. Al referirse a los casos de las cúbicas no reducibles a cuadráticas dice: "... excepto uno de ellos (el ejemplo dado por Al-Mahani) ninguno ha sido tratado por los algebristas, mas yo los discutiré y los demostraré geométricamente, no numéricamente". Esta conexión de los problemas de tercero y de cuarto grado, que los árabes no supieron resolver aritméticamente con los problemas geométricos, es un progreso importante de la matemática árabe. Así como algunos matemáticos árabes "pusieron en ecuación", mediante su traducción algebraica, ciertos problemas de índole geométrica, otros como Omar, trataron el caso inverso: la traducción y solución geométrica de ecuaciones algebraicas. (4)

El siglo XII ve el principio de la decadencia de la ciencia árabe del Oriente, pero en cambio es el siglo en que esta ciencia alcanza su apogeo en la España musulmana. No abundaron en ella los matemáticos; entre los más notables mencionemos al judío Abraham Bar Hiyya, apodado Sarrasorda, traductor sistemático de obras, en especial astronómicas, del árabe al hebreo, y de ahí uno

de los creadores del lenguaje científico hebreo. Se le debe una obra original en hebreo traducida al latín por el autor en colaboración con Platón de Tivoli, con el título de *Liber embadorum,* tratado de agrimensura y de geometría prácticas; obra que ejerció influencia tanto entre los hebreos como entre los cristianos. Su versión latina es una de las primeras obras que aporía la resolución de la ecuación de segundo grado en este idioma. Otro matemático importante hispanoárabe es el astrónomo Jaber b. Aflah, el Geber de los latinos, a veces confundido con el célebre Geber de los alquimistas cuando no se utilizó la semejanza de su nombre con la palabra "álgebra" para atribuirle el invento y denominación de esa rama de la matemática. La contribución de Geber a la matemática corresponde al campo de la trigonometría esférica en la que demostró una propiedad de los triángulos rectángulos a veces llamada "teorema de Geber". (5)

En este período, siglos XI a XIII la ciencia oriental, hindú y árabe, deja de tener influencia directa o indirecta sobre el saber occidental y, éste inicia un despertar que adquirirá impulso en los tiempos renacentistas para empalmar con los albores de la ciencia moderna.

No obstante, tal declinación de la influencia de la ciencia oriental en Occidente, conviene para terminar con esa ciencia, resumir en líneas generales esa influencia, así como recordar algunas de sus manifestaciones tardías que revelen interés.

El último, cronológicamente de los matemáticos hindúes de importancia es Baskhara del siglo XII, en cuya obra astronómica dedica dos capítulos: *Lilavati* (la hermosa o la noble ciencia) y *Vija-Ganita* a la aritmética y al álgebra. Es probablemente la obra más importante de la matemática hindú, en la que se advierten influencias de la matemática griega, como de las árabe y china; por lo demás, el autor reconoce haber utilizado obras de autores anteriores, entre ellos de Brahmagupta.

Como contribuciones originales pueden mencionarse cuestiones de análisis indeterminado de segundo grado;(6) algunas fórmulas aproximadas, por ejemplo para $\sqrt{2}$ da el valor $^{24}/_{17}$ (que se obtendría restando los numeradores y denominadores de las reducidas $^{41}/_{29}$ y $^{17}/_{12}$ del desarrollo en fracción continua de $\sqrt{2}$; y

unas lacónicas demostraciones de teoremas, como el de Pitágoras y de equivalencias, mediante figuras con ciertas descomposiciones y recomposiciones, y como única explicación un imperativo: ¡Mira! Por ejemplo, descompone un círculo en doce sectores y un rectángulo de base la semicircunferencia rectificada y altura el radio en ocho triángulos rectángulos iguales, para "demostrar" la equivalencia entre el círculo y el rectángulo.

Ya hablamos de las contribuciones originales de la matemática hindú: la introducción de las funciones circulares y el sistema de numeración. Podemos agregar que más adelante aparece cierto simbolismo precursor del álgebra sincopada, así como del uso del cero como símbolo, vieron además los hindúes claramente la diferencia entre números positivos y negativos que interpretaban como créditos y débitos que distinguían simbólicamente, hecho que les permitió unificar las ecuaciones de segundo grado en un solo tipo, cualesquiera fueran los coeficientes y hasta de admitir las soluciones negativas, aunque sin tomarlas en consideración, pues, como dice Baskhara, "la gente no aprueba las raíces negativas".

Otro rasgo caracteriza el período histórico de la matemática, que tiene por escenario la India de los siglos V a XII: es la época que el historiador Smith calificó de "época de la poesía", pues esa ciencia se muestra revestida de un ropaje poético; todas las obras se escribieron en verso, y en ellas se utilizó un lenguaje metafórico que en especial se pone de relieve en el folklore matemático, donde se eligieron con preferencia aquellos temas que más se prestaban a ser expresados en forma poética.

Veamos algunos ejemplos: "Hermosa niña de ojos radiantes, dime, si has comprendido el método de inversión: ¿cuál es el número que multiplicado por 3, agregándole ¾ del producto, dividiendo por 7 y disminuyendo en $^1/_3$ el cociente multiplicándolo por sí mismo, disminuyéndolo de 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndolo por 10, da el número *a* ?" El resultado es 28, que se obtiene recorriendo todas las operaciones en orden inverso: 2, 20, 12, 144, 196, 14, 21, 147, 84, 28.

He aquí un par de problemas hindúes que exigen el conocimiento del teorema de Pitágoras. El primero que también podría ser chino, es una variante del "problema de la caña": ¿cuál es la longitud de la rama más alta de un árbol de bambú que el viento

ha quebrado, conociendo la altura del árbol y la distancia en el suelo desde la cima hasta la raíz?

El segundo es más hindú; dos ascetas, viven en la cima de una montaña de altura conocida, cuya base está a una distancia conocida de la aldea próxima. Para ir a esa aldea uno de ellos desciende y se dirige a ella caminando; el otro, que es mago, prefiere volar; asciende una cierta altura, y luego se dirige directamente, siempre en vuelo, a la aldea. ¿Cuál debe ser esa altura para que ambos ascetas recorran la misma distancia?

Veamos por último un problema típico que aparece en Baskhara: “La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho quedan encerrados en una flor de loto, que los sedujo por su dulce perfume. Los $^{8}/_{9}$ del enjambre quedaron atrás. Dime el número de abejas". El problema exige la resolución de una ecuación de segundo grado, que tiene dos raíces positivas; pero de las cuales: sólo la entera 72 (la otra es $^{9}/_{2}$) satisface las poéticas exigencias del problema.

En cuanto a la matemática árabe, tanto en Oriente como en Occidente, continuó progresando con ritmo decreciente, (7) mientras declinaba su influencia en el mundo cristiano. Esa influencia había sido notable no tanto en el sentido de aportar contribuciones originales pues en realidad la ciencia árabe bebió en fuentes griegas, hindúes quizá chinas y hasta en algún resto de la antigua ciencia de los babilonios, sino por haber sido esa ciencia árabe el conducto mediante el cual el antiguo saber griego conservado y reelaborado se trasvasó a Occidente.

Sin duda, ese antiguo saber griego se había conservado en el mundo bizantino, pero en ese mundo aquel saber quedó como fosilizado, petrificado; lo prueba el escaso aporte científico de los bizantinos, aun a partir del año 1000, época del llamado "renacimiento bizantino", en el cual, desde el punto de vista matemático, sólo podemos mencionar a un Máximo Planude del siglo XIII que es el primer griego que conoce las cifras "árabes" y a un Manuel Manscopulo, de comienzos del siglo XIV, que introduce, probablemente por primera vez en griego, las reglas para la construcción de cuadrados mágicos.

En cambio, el contacto entre árabes y cristianos, ya en forma esporádica, ya en forma más permanente produjo su fruto que, en el campo matemático, significó una adquisición más completa del saber griego con el agregado del saber hindú y árabe, lograda a través de las traducciones al latín de los principales escritos de autores griegos y árabes.

Los primeros signos de la influencia árabe en Occidente se han visto en Gerberto de Aurillac, papa Silvestre II en 999, que hacia 970 residió en el condado de Barcelona y que, por las obras matemáticas que se le atribuyen, fue el primer científico que divulgó en Occidente las cifras árabes sin el cero. En efecto, Gerberto habría introducido en Occidente el "ábaco" de los árabes, diferente del ábaco con bolillas, pues con él se opera con fichas que llevaban grabadas las nueve cifras o letras equivalentes (la ficha del cero no era necesaria), de una manera tal que condujo naturalmente a nuestra manera habitual de operar (el "algoritmo" de los medievales), cuando en lugar del instrumento y de las fichas se comenzó a operar escribiendo las cifras en cuadros con arenillas, de ahí el nombre de "cifras gubar" (de *gubar* = polvo, en árabe), que se dio a las nueve cifras sin el cero. Pero la mayor influencia de la matemática árabe se debió a los contactos más directos: el comercio mediterráneo, las contiendas bélicas y, en especial, las Cruzadas y sobre todo la permanencia de árabes en tierras cristianas: Sicilia y España.

A mediados del siglo XII se inicia una era de traducciones, en gran parte del árabe al latín, aunque también del hebreo al latín, como del árabe al hebreo y más adelante también directamente del griego al latín.

De los traductores que estuvieron en Oriente citemos a Adelardo de Bath, que tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides y escritos de Al-Khuwarizmi: las tablas astronómicas y probablemente la *Aritmética*.

En Sicilia, donde bajo el impulso de los reyes normandos, hubo un intenso intercambio entre las culturas griega, árabe y latina, también se realizaron traducciones del árabe al latín, y hasta del griego al latín. En este último caso, están *Datos* y la *Óptica* de Euclides, y el *Almagesto* de Ptolomeo, y no deja de ser interesante destacar que esta traducción directa de la obra de Ptolomeo no

tuvo mayor difusión, pues fue desplazada por la traducción indirecta del árabe, que poco después realizó Gerardo de Cremona.

Pero el centro más activo de traducciones fue España. Entre los traductores más antiguos figura la pareja de mediados del siglo XII: Domingo Gundisalvo y Juan de Sevilla, que traducían en colaboración: Juan, del árabe al castellano, y Gundisalvo del castellano al latín. Entre sus traducciones figura una aritmética donde ya se mencionan las cifras hindúes con el cero, no se habla del ábaco, y aparece el término "algoritmo".

Contemporáneo de los anteriores es Roberto de Chester que residió en España a mediados de siglo y a quien se debe la importante traducción latina del álgebra de Al-Khuwarizmi.

Pero los más fecundos traductores de obras científicas fueron Platón de Tívoli y Gerardo de Cremona. Ya mencionamos a Platón, quien, entre otras obras, tradujo la *Esférica* de Teodosio, con motivo de su colaboración con Bar Hiyya. En cuanto a Gerardo de Cremona que residió y murió en Toledo, y a quien se debe la traducción de más de 80 obras, figurando entre los autores matemáticos que tradujo, los griegos Euclides, Arquímedes, Apolonio, Autolico, Hipsicles, Teodosio, Gemino y Ptolomeo, y los árabes Al-Khuwarizmi, Al-Nayrizi, Tabit b. Qurra, Abu Kamil, Jabir b.Aflah y Al-Zarqali. De este último, el Arzachel de los latinos, conocido astrónomo y constructor de instrumentos del siglo XI tradujo las *Tablas toledanas*, compilación de las observaciones realizadas por Al-Zarqali y sus colegas que más tarde sirvieron de base para la preparación de las Tablas alfonsinas que ordenó compilar Alfonso el Sabio.

Entre las traducciones directamente del griego al latín citemos la versión del escrito de Arquímedes *De los cuerpos flotantes*, realizada por el dominico flamenco Guillermo de Moerbecke, del siglo XIII versión importante, pues es la que hizo conocer esa obra al mundo cristiano que no entró en posesión de un manuscrito original en griego hasta comienzos de este siglo.

La obra de los traductores puso a disposición de los científicos occidentales gran parte del saber griego y del saber árabe, circunstancia que, unida a la atmósfera cultural de la época escolástica, universidades,… explica el renacimiento que en el siglo XIII experimentara la matemática en Occidente.

Ese renacimiento inicia con una figura notable: Leonardo Pisano, llamado Fibonacci (contracción de la expresión "hijo de Banaccio", apellido del padre), sin duda el más grande de los matemáticos medievales.

Con motivo de una misión oficial encomendada al padre, Leonardo estuvo en África del Norte y recorrió más tarde varios países musulmanes, donde se puso en contacto con los árabes y adquirió su saber matemático. Al regresar a Pisa publicó en 1202 y reeditó en 1228 un *Liber abaci* o *Libro de los ábacos* que, no obstante el título, combate el uso de los ábacos, para mostrar en cambio las ventajas del sistema decimal y de las cifras hindúes sobre el sistema romano y los números romanos. En realidad no fue Leonardo quien introdujo en la Europa cristiana las cifras hindúes, pero sí fue quien divulgó su uso mostrando sus ventajas (por ejemplo, el número 4321 exige en números romanos diez letras), aunque no por eso quedaron desterradas los antiguos números romanos y el ábaco que continuaron en uso en especial en la vida comercial durante mucho tiempo, mientras en el campo más científico se entablaba una lucha entre abacistas y algorítmicos que se prolongaría hasta comienzos del siglo XVI.

Además del *Liber abaci* se deben a Leonardo una *Practica geometriae* de 1220, donde introduce en Occidente la resolución de problemas geométricos mediante el álgebra, uno de estos problemas, que muestra además su pericia de calculista aparece en una *Epístola* al maestro Teodoro (un matemático del emperador no mejor especificado); además en *Practica geometriae* aparecen procedimientos para medir alturas y depresiones con un cuadrante. Pero los escritos más originales de Fibonacci son: el de título abreviado... *super solutionibus quaestionum* ... Y *Liber quadratorum* ambos de 1225, que tratan distintas cuestiones de aritmética y de álgebra entre las cuales tres problemas que a modo de desafío le lanzó Juan de Palermo de la corte de Federico II y que Leonardo resolvió. (8)

Algo posterior a Leonardo es Giovanni Campano de Novara, que tradujo los *Elementos* de Euclides, incluyendo los llamados Libros XIV y XV, para lo cual utilizó la versión de Adelardo, pero recurrió también directamente a las fuentes árabes. Con esa traducción, que por lo demás constituyó el primer texto impreso de los *Elementos*

(Venecia, 1482), Campano demostró ser algo más que un traductor. Por ejemplo, se le debe el intento, sin duda el primero, de fundar la aritmética de los números naturales sobre un sistema de cuatro axiomas postulados. Los tres primeros afirman que la sucesión de los números naturales es limitada, mientras que el cuarto establece la existencia de un mínimo en todo grupo de números al fijar "que un número no puede disminuir indefinidamente”. Utiliza estos postulados en la determinación del máximo común divisor, así como en la demostración de la inconmensurabilidad de un segmento con los segmentos que lo dividen en media y extrema razón. Agreguemos que en sus comentarios Campano señala el carácter especial del ángulo formado por dos circunferencias tangentes, reabriendo la cuestión del "ángulo de contingencia" que ocupó y preocupó a los matemáticos hasta el siglo XVIII. El nombre de "ángulo de contingencia", para referirse al ángulo formado por la circunferencia con su recta tangente en su punto de tangencia, aparece en una obra de este siglo, perteneciente a un autor (o autores) de identidad discutida: Jordanus Nemorarius, a quien (o a quienes) se deben varios escritos mecánicos y matemáticos. (9)

También al siglo XIII pertenece John de Holywood, más conocido por su nombre latinizado Sacrobosco, que en 1230 era maestro en Paris. Por la fama que gozaron y la influencia que ejercieron, más que por su valor intrínseco, cabe recordar su *Sphera mundi*, compilación de las partes más elementales del *Almagesto*, que sirvió de texto en toda Europa hasta después de Copérnico, y su *Algoritmus vulgaris* o *Tractatus de arte numerandi* tratado elemental de aritmética que trata de la numeración, adición, sustracción, división por 2, duplicación, multiplicación, división, suma de números naturales y de impares, y extracción de raíces. Con todo, este texto elemental contribuyó a la difusión de las cifras arábigas y de la numeración decimal.

Notas complementarias

(1) Los problemas de tercer grado. Ya vimos cómo los geómetras griegos resolvían los problemas, que hoy llamamos de tercero o de cuarto grado por la índole de la ecuación algebraica que los resuelve, mediante construcciones que trascendían el uso de rectas y circunferencias, en especial utilizando cónicas. Los matemáticos árabes conocían, por supuesto, tales construcciones, pero sus conocimientos de álgebra les permitieron "poner en ecuación" esos problemas, aunque no podían resolver aritméticamente la ecuación, sino en forma aproximada. Un ejemplo lo ofrecen las ecuaciones a las que conduciría la construcción del eneágono regular. Para ello un discípulo de Al-Biruni parte del lado del polígono regular de 18 lados: $x = sen\ 10°$ y lleva la ecuación: $x^3 + 1 = 3x$ que resuelve el problema. Por su parte, Al-Biruni había llegado a una ecuación semejante: $x^3 = 1 + 3x$ para $x = 2\ cos\ 20°$, que resolvió aproximadamente sin indicar el procedimiento dando el valor de x en el sistema sexagesimal hasta las unidades de cuarto orden, que corresponde a un valor exacto hasta nuestra sexta decimal.

(2) El problema de Alhazen. Este problema consiste en determinar en un espejo convexo la ubicación de la imagen conociendo las posiciones del objeto y del observador. Si 0 es el centro de la sección circular del espejo, de radio r, en el plano que contiene los puntos A (objeto) y B (observador), y por lo tanto, la imagen M; siendo $OA = r_1$; $OB = r_2$, α_1, α_2 los ángulos que OM forman con OA y OB, respectivamente, se tendrán, de acuerdo con la ley de la reflexión (proyectando A y B sobre OM):
$(r_1 cos\ \alpha_1 - r) : r_1 sen\ \alpha_2 = (r_2 cos\ \alpha_1 - e) : r_2 sen$, con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ conocido; sistema de ecuaciones que resuelve el problema. Es un problema de cuarto grado, comprobándose que el punto M está sobre una hipérbola equilátera de asíntotas paralelas a las bisectrices del ángulo α_2 y, por tanto, comparando con la ecuación de la circunferencia, ese punto M está también en dos parábolas de ejes paralelos a los ejes de la hipérbola, respectivamente. Y es mediante la intersección de la circunferencia con una de esas hipérbolas que Alhazen da la solución geométrica del problema.

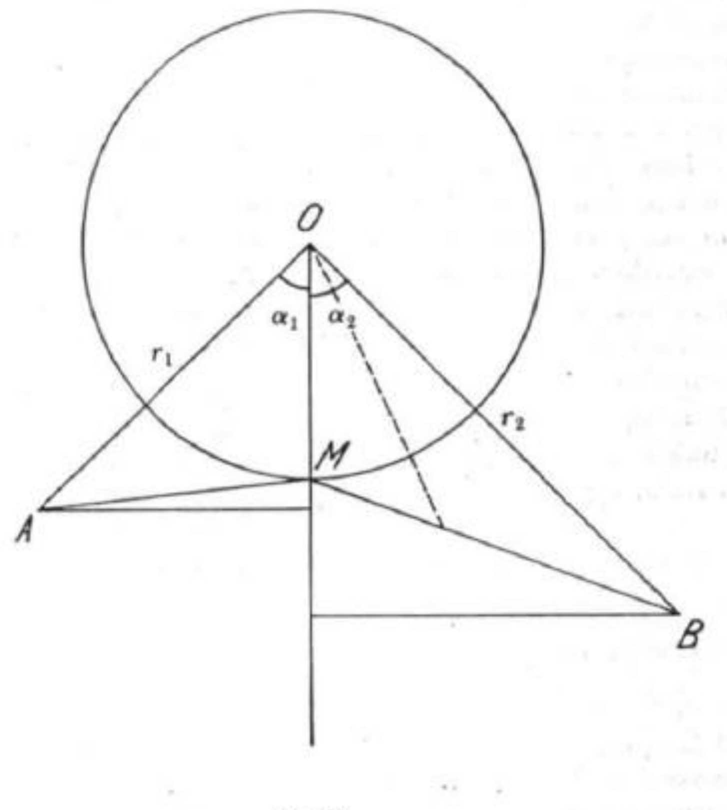


Fig. 23

(3) La suma de los cubos de Al-Karhi. La "demostración" de Al-Karhi, utilizando al *gnomon* a la manera pitagórica, es notable. Considera el cuadrado pitagórico formado por la sucesión de los números impares, pero ahora los gnómones agrupan 1, 2, 3,... números impares sucesivos. Comprueba que cada gnomon es un cubo:

$$1 = 1^3 \,;\, 3 + 5 = 8 = 2^3 \,;\, 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3 \ldots$$

(en general el $p°$ gnomon es suma de dos rectángulos de lados p y *½ p(p – 1) y ½ p(p + 1),* respectivamente, cuya suma de puntos es p^3 , de manera que si el cuadrado contiene n de esos gnómones, el lado del cuadrado contiene un número de puntos igual a la suma de los n primeros números, mientras que el número total de puntos del cuadrado es la suma de los primeros n cubos, demostrando así la propiedad.

(4) El álgebra de Omar Khayyam. He aquí los 25 casos en que Omar Khayyam distingue y clasifica sus ecuaciones:

Simples (binomias):

$a = x$; $a = x^2$; $a = x^3$; $bx = x^2$; $cx = x^3$; $bx^2 = cx^3$

Compuestas trinomias (cuadráticas):

$x^2 + bx = a$; $x^2 + a = bx$; $bx + a = x^2$;

Compuestas trinomias (cúbicas reducibles a cuadráticas):

$x^3 + cx^2 = bx$; $x^3 + bx = cx^2$; $cx^2 + bx = x^3$;

Compuestas trinomias (cúbicas):

$x^3 + bx = a$; $x^3 + a = bx$; $bx + a = x^3$; $x^3 + cx^2 = a$; $x^3 + a = cx^2$; $cx^2 + a = x^3$;

Compuestas cuatrinomias (un término igual a la suma de tres términos):

$x^3 + cx^2 + bx = a$; $x^3 + cx^2 + a = bx$; $x^3 + bx + a = cx^2$ $x^3 = cx^2 + bx + a$;

Compuestas cuatrinomias (suma de dos términos igual a suma de dos términos):

$x^3 + cx^2 = bx + a$; $x^3 + bx = cx^2 + a$; $x^3 + a = cx^2 + bx$.

Veamos la solución geométrica de Omar en el caso de la cuatrinomia $x^3 = cx^2 + bx + a$. Considera un prisma de base cuadrada de área b y de volumen a y dibuja dos hipérbolas equiláteras de ecuación en $xy\sqrt{b} = a$ y $(y + b)^2 = (x - c)(x + a/b)$. De acuerdo con las propiedades de esas cónicas Omar logra comprobar que cierto segmento cumple la condición de la incógnita x de la ecuación. Por supuesto que no advierte que el punto *T,* donde también se cortan las dos hipérbolas, es otra solución pues opera únicamente con los valores positivos de la incógnita. En efecto, al eliminar y entre las dos ecuaciones en coordenadas cartesianas, aparece una ecuación de cuarto grado que tiene en ambos miembros el factor $a + bx$. Eliminando ese factor, que es en realidad una raíz extraña a la ecuación cúbica, queda esta ecuación como resultante.

Es probable que se advirtiera que el procedimiento podía extenderse a ecuaciones de cuarto grado, pues en un escrito posterior aparece resuelto, mediante la intersección de una circunferencia con una hipérbola, el problema de determinar la

base menor de un trapecio de área conocida y cuyos otros tres lados son iguales a un valor también conocido. Si S y a son los datos y con x e y se indican la proyección del lado del trapecio sobre la base mayor y la altura, se tiene $S = (a - x)y$; $x^2 + y^2 = a^2$ ecuaciones de una hipérbola y una circunferencia que resuelven, en este caso, una ecuación de cuarto grado en x o en y.

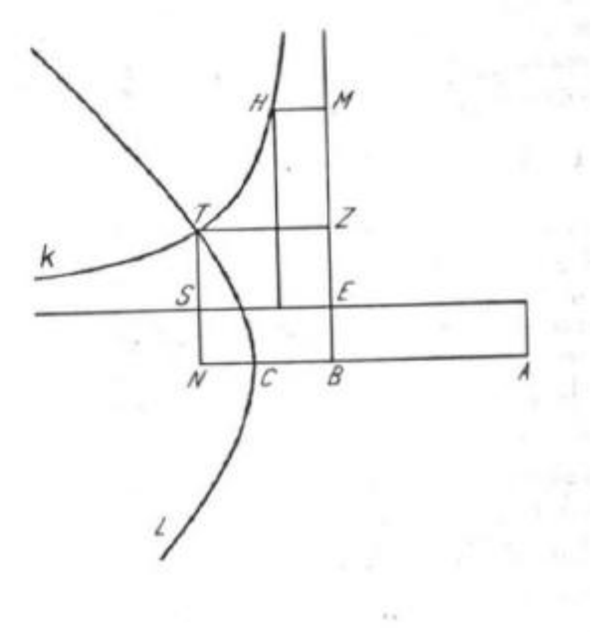


Fig. 24

(5) El teorema de Geber: Una de las primeras modificaciones que introduce Geber es sustituir la "regla de las seis cantidades" por una "regla de las cuatro cantidades" propia. Para ello parte de los triángulos esféricos *AA'B'* y *CC'B'* rectángulos en *A'* y *C';* aplica a estos triángulos el teorema del seno y eliminando el *sen B'* obtiene la "regla de las cuatro cantidades".

sen AA' : sen CC' = sen AB' : sen CB'. Si *B* es el polo de *A'B'C',* supuesto que también el ángulo *A* es recto, se tiene otro triángulo rectángulo ABC de hipotenusa *a.* Si la regla de las cuatro cantidades se aplica a los triángulos *ABC* y *A'B'C'* se obtienen fórmulas *sen b = sen a· sen b*, ya conocida, pero que, aplicada a *B'C C'* rectángulo en *C'* se llega a *sen B'C' = cos A' C' = sen C sen B'C,* o sea *cos B = sen C cos b,* fórmula de los triángulos esféricos aún no conocida entonces.

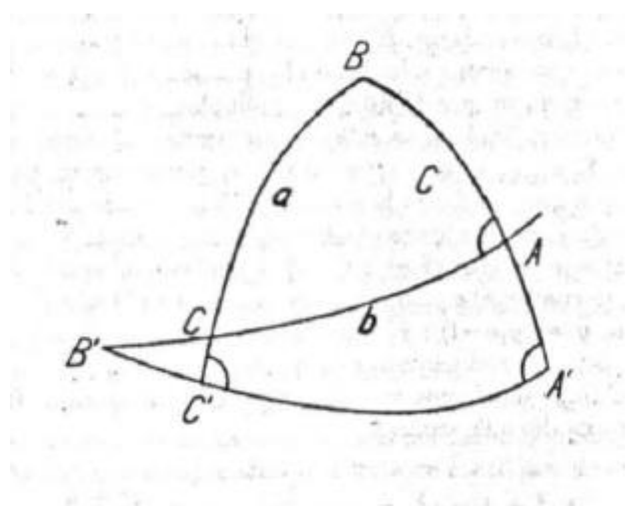


Fig. 25

(6) El análisis indeterminado no lineal de los hindúes. He aquí algunos casos de ecuaciones indeterminadas de segundo grado que los hindúes resolvieron mediante ejemplos numéricos. Así, la ecuación $xy = ax + by + c$ la resolvían buscando dos números m y n tales que $mn = ab + c$, de donde es fácil comprobar que las soluciones $x = m + b$; $y = n + a$ satisfacen a la ecuación.

Más interesante son las investigaciones acerca de la ecuación cuadrática de la forma $nx^2 + m = y^2$, de la cual, conociendo una solución, deducían otras para la misma ecuación o semejantes. Por ejemplo, si x_1, y_1 y x_2, y_2 eran dos soluciones (que podían coincidir) de la ecuación anterior en virtud de la propiedad
$m = y_1^2 - nx_1^2 = y_2^2 - nx_2^2$ se llega a
$m^2 = (nx_1x_2 + y_1y_2)^2 - n(x_1y_2 + x_2y_1)^2$ y por tanto a una solución de la ecuación $nx^2 + m^2 = y^2$. De ahí que en caso de $m = 1$ conocida una solución se obtiene otra y así sucesivamente. También se obtenía una solución de la ecuación $nx^2 + 1 = y^2$ si la solución anterior era un par de números múltiplo de m.

Otro proceso "ciclo" se aplicaba para reducir el coeficiente m de la ecuación. Si x_1, y_1 es una solución con x_1 primo con m, buscaban los valores z y u que satisfacían la ecuación indeterminada lineal $x_1z + y_1 = mu$, y de esas soluciones elegían aquella que hacía lo más pequeño posible $z^2 - n = (mu^2 - 2uy_1 + 1){:}\, x_1^2 = mm'$ con m' entero y pequeño. Además se comprueba que la nueva ecuación

$nx^2 + m' = y^2$ se satisface para $x = u; y = (y_1 u - 1): x_1$ pudiendo aplicar a la ecuación con m' el mismo proceso, y reducir aún más ese término.

Por último, señalemos la solución de reminiscencia diofántica que Brahmagupta dio a la ecuación

$$nx^2 + 1 = y^2 \;\; ; \;\; x = \frac{2z}{z^2 - n} \;\; ; \;\; y = \frac{z^2 + n}{z^2 - n}$$

(7) La matemática árabe a partir del siglo XIII. En la España musulmana, fuera de algunos autores de compendios de aritmética y de álgebra como Ibn Badr (el Abenbeder de los latinos), probablemente de los siglos XII o XIII sólo cabe mencionar al marroquí Ibn-Banna, que floreció entre los siglos XIII y XIV y, autor de numerosos escritos, algunos muy difundidos y comentados, en especial un *resumen de las operaciones aritméticas* en el que usa constantemente las cifras hindúes, mejora el tratamiento con fracciones, da reglas de raíz cuadrada abreviada, expone con esquemas gráficos las reglas de "doble falsa posición" para la resolución de las ecuaciones lineales, explica las pruebas de las operaciones mediante los restos por 9, 8 y 7, etcétera.

Más importantes son los científicos orientales. Durante la época de la invasión y dominio de los mongoles florece un científico persa Nasir Al-Din, escritor fecundo y enciclopédico, pero especialmente matemático y astrónomo. Se le atribuyen más de 60 obras en árabe y en persa, entre las que se cuentan traducciones y elaboraciones de autores griegos. En matemática es autor de un estudio original sobre el "cuadrilátero completo", en el que analiza todos los casos posibles que se distinguen tanto desde el punto de vista gráfico como métrico; de un tratado en el que desarrolla las funciones circulares independientemente de su aplicación a la astronomía con sus aplicaciones a la trigonometría plana y esférica; y también de una interesante "demostración" del postulado de Euclides, único intento ubicado entre los que habían realizado los antiguos griegos y los que realizaran los matemáticos del Renacimiento.

Esa demostración consiste en admitir como evidente una hipótesis distinta, pero equivalente. En efecto, Nasir da como evidente que si se tiene el segmento *AB*, por *A* una recta *CD* perpendicular y por *B* otra recta *EF* oblicua, los segmentos *A'B',*

A"B",... perpendiculares a *CD* y comprendidos entre *CD* y *EF* son menores que *AB*, si están en el semiplano en el que *EF* forma con *AB* un ángulo agudo, y mayores que *AB* en el otro semiplano. Con esta proposición deduce que dos segmentos *MN* y *PQ* iguales y perpendiculares a *MP*, situados en el mismo semiplano respecto de esa recta formarán un rectángulo *MNPQ*, de donde deduce fácilmente el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo y de ahí el postulado de Euclides.

En el mundo mongol cabe aun recordar la figura del príncipe Ulug Beg, del siglo XV, astrónomo que realizó una importante labor científica reflejada en las mejores tablas astronómicas del Islam, que completan las de Nasir Al-Din que comprenden una serie de cuestiones de orden matemático.

Terminemos esta reseña mencionando una obra algebraica de Baha Al-Din. Ya en pleno Renacimiento europeo, que entre otros asuntos contiene una nómina de siete problemas que "han permanecido insolubles desde los tiempos antiguos, resistiéndose a todos los genios hasta esta época", como se expresa el autor. Damos a continuación, con algunas consideraciones, los enunciados de esos problemas, que pueden dar una idea del progreso realizado por el álgebra árabe desde la época de su advenimiento con Al-Khuwarizmi cerca de siete siglos antes.

l. Dividir el número 10 en dos partes tales que si a cada parte se le agrega su raíz cuadrada el producto de las dos sumas es un número dado (ecuación de cuarto grado que puede tener soluciones enteras para determinados valores del producto dado).

2. Buscar un número de cuyo cuadrado sumándole o restándole 10, se obtienen cuadrados (imposible).

3. Hallar un número tal que el primero es 10 menos la raíz cuadrada del segundo y éste 5 menos la raíz cuadrada del primero (ecuación de cuarto grado sin raíces racionales enteras).

4. Descomponer un cubo en suma de dos cubos (Imposible).

5. Dividir 10 en dos partes tales que su cociente más su recíproco de éste dé por resultado a uno de los números (ecuación de tercer grado sin raíces racionales).

6. Hallar tres cuadrados en progresión geométrica, cuya suma sea un cuadrado (imposible).

7. Hallar un número cuyo cuadrado sumándole o restándole ese número más 2 dé siempre un cuadrado (éste es el único problema que tiene solución racional, pues el número $^{34}/_{15}$ más 2 que es $^{64}/_{15}$, sumado o restado del cuadrado $^{1156}/_{225}$ a los cuadrados, respectivamente de $^{46}/_{15}$ y $^{14}/_{15}$.

(8) La obra de Fibonacci. Reseñemos brevemente el contenido de los 15 capítulos del *Liber Abaci* de Leonardo, obra que ha ejercido notable influencia entre sus contemporáneos y sucesores inmediatos. En el primer capítulo habla de las nueve cifras "hindúes" a las que, dice, debe agregarse el cero que llama "zephirum" del árabe "sifr" que significa vacío, palabra con que los árabes designaban el cero y que luego dio nacimiento a nuestro vocablo "cifra". En el mismo capítulo, agrega algunas reglas de cálculo digital y tablas de suma y de multiplicación. En los cuatro capítulos siguientes, se ocupa de las operaciones con enteros en el orden: multiplicación, suma, resta, división, se dan vanas reglas operatorias para la multiplicación y las pruebas del 7, del 9, y del 11 y se enuncia la descomposición de fracciones en suma de fracciones unitarias.

Los capítulos VI y VII se ocupan de las operaciones con fracciones con la descomposición de fracciones en suma de fracciones unitarias; mientras que los capítulos VIII a XI tratan de las aplicaciones, enunciado y resolviendo problemas de toda índole: de tres simple y de tres compuesta; de sociedad, de cambio de monedas, etcétera. Aparecen problemas de análisis indeterminado del tipo de los "100 pájaro...". (Problemas de este tipo, modificando el número de animales, se presentan también en la mencionada *Epístola* al maestro Teodoro.)

De índole más variada son los problemas de los dos capítulos siguientes entre los cuales cabe mencionar:

a) problemas de progresiones, entre ellos el del ajedrez. Aparece la suma de los cuadrados que Leonardo estudia también en su *Liber quadratorum*.

b) Sistemas lineales del tipo siguiente: hallar *n* números sabiendo que cada uno de ellos sumado a determinadas fracciones de los demás da el mismo resultado, conocido o indeterminado.

Para estos sistemas, a veces hasta de seis incógnitas Leonardo da reglas bastante generales.

c) El problema que dio lugar a una sucesión recurrente (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...) hoy llamada de Fibonacci, que mereció muchos estudios desde el siglo pasado y cuyo enunciado es el siguiente: Calcular el número de parejas de conejos que se tendrán al cabo de un año, sabiendo que se ha partido de una sola pareja y que cada pareja a partir de su segundo mes produce mensualmente una pareja.

Mientras el penúltimo capítulo se ocupa de la extracción de raíces el último trata de cuestiones relativas a la geometría y al álgebra. Aparecen: la solución de la ecuación pitagórica y al final la resolución de la ecuación de segundo grado a la manera árabe hasta con los ejemplos numéricos de Al-Khuwarizmi.

En este sentido, es importante el problema que plantea en la mencionada *Epístola*, probablemente la primera "puesta en ecuación" en Occidente de un problema geométrico. Se trata de suprimir de un triángulo isósceles, de base 12 y lado igual 10, dos triángulos simétricos en los vértices de la base de manera que lo que queda sea un pentágono equilátero. Es una ecuación de segundo grado de expresión $7x^2 + 256x = 1280$, cuya raíz positiva no es entera; sin embargo, Leonardo da su valor aproximado y en una forma curiosa, pues la parte fraccionaria la expresa mediante fracciones sexagesimales, costumbre que se mantendrá hasta la aparición de las fracciones decimales en el siglo XVI. Leonardo da el resultado hasta la cuarta fracción sexagesimal con todas sus cifras exactas, pero sin indicar cómo llegó a él. Es posible que Leonardo haya sido inducido a buscar la solución algebraica de este problema ante la dificultad de resolverlo geométricamente. Sin embargo, hoy tal solución es inmediata: se trata de determinar las direcciones desconocidas de dos vectores de un pentágono cerrado conociendo las direcciones de tres de ellos y las intensidades de todos los vectores.

Leonardo no admite números negativos, aunque en un problema indeterminado que figura en *Flos* referente a intercambio de dinero que no tiene solución positiva reconoce "que es necesario conceder que alguna persona tenga un crédito".

Otra serie de cuestiones suscitan los problemas propuestos por Juan de Palermo. El primero de los tres problemas es: Hallar un número cuyo cuadrado aumentado o disminuido de 5, siga siendo un cuadrado.

Este problema llevó, sin duda, a Leonardo a estudiar una serie de cuestiones y problemas vinculados con los cuadrados, que dieron lugar a su *Liber quadratorum*. En este libro estudia las propiedades de los números de la forma $4mn\ (m^2 - n^2)$ con m y n naturales, que interviene en la identidad a veces que lleva su nombre:

$$(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$$

y que le sirvió para resolver el problema propuesto por Juan de Palermo, pues bastaría hacer $4mn(m^2 - n^2) = 5$; como esto no es posible para m y n enteros admite una solución fraccionaria, de manera que deberá ser $5q^2 = 4mn(m^2 - n^2)$ siendo q el denominador de la fracción. La igualdad anterior se satisface para $m = 5;\ n = 4;\ q = 12$ y en definitiva el número que resuelve la cuestión es ${}^{41}/_{12}$, cuyo cuadrado aumentado o disminuido de 5 da los cuadrados de ${}^{49}/_{12}$ y ${}^{31}/_{12}$ respectivamente, y ésta fue la solución de Fibonacci. Agreguemos que en *liber quadratorum* hay problemas menos fáciles como, por ejemplo: hallar tres números cuya suma agregada al cuadrado del primer número sea un cuadrado que, agregado al cuadrado del segundo número, vuelva a dar un cuadrado, que a su vez sumado al cuadrado del tercer número aparezca nuevamente un cuadrado. La solución de Fibonacci es: los números son 35, 144 y 360 y los cuadrados que se van obteniendo son los de los números 42, 150 y 390.

El segundo problema propuesto por Juan era: hallar con los métodos del libro décimo de los *Elementos* una línea cuya longitud satisfaga a la condición (expresada con símbolos modernos), $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Este problema condujo a Leonardo a uno de los primeros análisis de una ecuación algebraica demostrando que la raíz no es un número entero, pues está comprendida entre 1 y 2, ni pertenece a ninguno de los tipos de irracionales del Libro X y finalmente y sin decir cómo logró la solución, da el valor de la raíz en forma

aproximada hasta con seis fracciones sexagesimales, valor exacto hasta nuestra novena decimal.

El tercer problema es un problema indeterminado de primer grado que se enuncia: Tres hombres tienen en común un capital repartido en la proporción $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$. Cada uno de ellos toma al azar una parte del capital, apartan de esas partes respectivamente $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ que reúnen y dividen en tres partes iguales. Cada una de estas partes, agregada al sobrante de la cantidad tomada al azar, reproduce para cada persona el capital inicial propio. ¿Qué parte tomó cada uno al azar?

Es Leonardo que elige adecuadamente como nueva incógnita las partes iguales en que se ha dividido la reunión de las fracciones de las cantidades tomadas al azar. Si esa incógnita es u y el capital total es s, la parte sobrante de cada uno es respectivamente $\frac{1}{2} s - u$; $\frac{1}{3} s - u$; $\frac{1}{6} s - u$ que son respectivamente $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$ de las cantidades tomadas al azar, que a su vez suman s de donde

$$s = 2 (\tfrac{1}{2} s - u) + \tfrac{3}{2} (\tfrac{1}{3} s - mu) + \tfrac{6}{5} (\tfrac{1}{6} s - u)$$

y en definitiva $7s = 47u$ y haciendo $u = 7$ (solución mínima) encuentra $s = 47$. Y las partes tomadas al azar resultan 33, 13, 1.

(9) Los escritos atribuidos a Jordanus Nemorarius. A este autor (o autores) se han atribuido: varios escritos importantes sobre mecánica y una obra cosmográfica donde se expone la propiedad de la proyección estereográfica que Ptolomeo sólo había verificado en casos particulares.

Una *Aritmética* y una *Demostratio de algoritmo*, que fuera del problema de determinar tres cuadrados en progresión aritmética no revelan mayor originalidad, pues están calcados sobre Nicómaco y Boecio.

Un *Tractatus de numeris datis*, con ecuaciones de primero y de segundo grados. Por ejemplo, determinar los términos de una proporción conociendo la suma de los extremos, de los medios, y la razón entre los antecedentes.

Una geometría plana *De Triangulis*, que no obstante el título, se ocupa de polígonos y circunferencias. Está escrita con rigor y en ella aparecen algunas relaciones notables entre las áreas y los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a

una circunferencia. Se advierten influencias griegas al hacerse referencia a los problemas clásicos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, así como también resonancias árabes al darse una fórmula general para el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia, fórmula exacta para los polígonos de 3, 4 y 6 lados, aproximada en otros casos reproduciendo para el caso del heptágono a un valor aproximado conocido por Abu Al-Wafa, que Jordanus llama "regla hindú".

La baja Edad Media

Al finalizar el siglo XIII Occidente penetra en una era de transición hacia el Renacimiento, ya que ese siglo fue la culminación cultural de los tiempos medievales, siglo en el que se destacan las figuras de Alberto Magno y Santo Tomás, de Bacon, el fraile, de Ramón Lull y Dante; figuras que, desde el punto de vista matemático, de esas figuras sobresalen Bacon por la importancia que asignaba a esa ciencia, aun sin ocuparse de ella, y Ramón Lull, cuyas investigaciones, o mejor lucubraciones lógicas, no dejaron de ser un primer esbozo, por grosero que fuere, de la futura lógica matemática y un anticipo de la característica universal leibniziana.

A la primera mitad del siglo XIV pertenece el teólogo inglés Thomas Bradwardine, que se ocupó de mecánica y de matemática. El más original de sus escritos matemáticos es una *Geometría especulativa*, donde considera los polígonos estrellados que no figuran en los *Elementos,* pero que hicieron su presencia en los comentarios de Boecio y en las versiones de Adelardo de Bath y de Campano. Bradwardine los engendra sistemáticamente, mediante prolongación de los lados de los polígonos regulares de orden inferior (los polígonos de primer orden son los convexos) y da correctamente la fórmula para la suma de los ángulos internos de los polígonos estrellados de orden inferior (Campano la había dado para el pentágono estrellado.) En otro tratado de Bradwardine (inédito): *Tractatus de continuo* aparecen algunas consideraciones acerca del ángulo de contingencia, del continuo y del infinito.

Durante el siglo XIV aparece en Inglaterra el primer tratado occidental, escrito en latín, en el que se exponen los principales teoremas de trigonometría a la manera euclidea: *Quadripartitum de sinibus demonstratis* del benedictino Richard de Wallingford de Oxford, aunque unos años antes de su muerte aparece en Francia una obra semejante, pero en hebreo, del judío provenzal Levi ben Gerson, matemático y astrónomo, entre cuyos escritos matemáticos figura una *Aritmética*; una memoria sobre los números de la forma 2^m y 3^n, demostrando que, con pocas excepciones, su diferencia es siempre mayor que uno; comentarios a los *Elementos* en los que intenta reducir el número de postulados y demostrar el postulado de las paralelas; y, como labor más original, un tratado de trigonometría donde considera al mismo tiempo la manera griega de medir los ángulos por medio de las cuerdas y las flechas, y la manera hindú mediante los senos y cosenos, dando las relaciones mutuas entre los cuatro elementos. Entre sus aportes a la trigonometría figura el actual “teorema del seno" para triángulos rectilíneos y una tabla de senos, construida a la manera de Ptolomeo.

Pero la novedad más interesante del siglo es la aparición de cuestiones de índole infinitesimal, diferentes de aquéllas de esa índole enlarvadas en la geometría griega. Se ocuparon de estas cuestiones en Inglaterra los maestros del colegio de Merton de Oxford: Richard (o Roger) Swineshead o Suisset y William Heytesbury. El primero fue un teólogo, matemático y mecánico que en virtud del título de su *Liber calculationum* (publicación póstuma de 1477), se le apodó "Calculator". En ese tratado, como en otro semejante de Heytesbury, se demuestra en forma retórica comparando movimientos uniformes y uniformemente variados, la siguiente regla que algunos autores ingleses denominan actualmente “regla de Merton”: el espacio recorrido en un movimiento uniformemente variado es igual al espacio recorrido en el mismo tiempo por un movimiento uniforme, cuya velocidad es la velocidad media entre las velocidades inicial y final del movimiento variado.

A este importante resultado de índole cinemática agrega “Calculator” un resultado no menos interesante de índole infinitesimal, al considerar movimientos arbitrarios de ley artificial

y tales que el cálculo de los espacios recorridos presupone la determinación de la suma de una serie convergente.

Un paso más adelante en el tratamiento de estas cuestiones lo da el maestro de París Nicolás Oresme, en cuyos trabajos matemáticos, aparece como novedad la representación gráfica de las "intensidades de las cualidades". Por supuesto que las representaciones gráficas en sí no significaban una novedad pues las figuras geométricas y los mapas son ejemplos antiguos de representaciones gráficas, pero la novedad que introduce Oresme, con su *Tractatus de latitudinibus*, es que ahora desaparece la homogeneidad entre la representación, que es un segmento, y la magnitud representada que es: tiempo o intensidad. Tomando como *longitudo* (nuestra abscisa) el tiempo, y como *latitudo* (nuestra ordenada) una intensidad: velocidad, calor u otras intensidades, que no siempre significan magnitudes, Oresme representa la cualidad o propiedad de acuerdo con la variación de la intensidad respecto del tiempo, aunque tal variación no se refleja, como en las coordenadas cartesianas, por la curva dibujada por los puntos de coordenadas dadas, sino por la figura total, por el área encerrada entre aquella curva, el eje de los tiempos y las intensidades inicial y final.

Cuando esa intensidad es la velocidad, dando por sabido que esa área (*mensura*) representa el espacio recorrido, la gráfica revelará, en efecto, la naturaleza del movimiento. Si el movimiento es uniforme (*latitudo uniformis*) la gráfica es una paralela al eje; si el movimiento es uniformemente variado (*latitudo uniformíter difformis*). La gráfica es una recta inclinada de pendiente distinta, según sea el movimiento acelerado o retardado; de igual manera otras gráficas representarán movimientos no uniformemente variados (*latitudo diffomiter difformis*).

En el caso del movimiento uniformemente variado, Oresme demuestra geométricamente, por comparación de figuras equivalentes, la regla que los maestros de Merton habían encontrado retóricamente. También Oresme considera, como "Calculator" movimientos aparentemente aún más complicados que implican el cálculo de sumas de series convergentes como valor de los espacios recorridos. (1)

No menos original es Oresme en otra de sus obras: *Algorismus proportionum*, donde con el nombre de "proporciones" dobles, mitad, una vez y media indica nuestras potencias de exponente 2, $^1/_2$, $^3/_2$, ... ; en una palabra expone una teoría de las operaciones con exponentes fraccionarios para los que adopta un simbolismo especial.

También algunos atisbos del concepto infinitesimal de límite pueden advertirse en la figura científica de Nicolás de Cusa o el Cusano del siglo XV que en sus escritos matemáticos se ocupó un par de veces de la cuadratura del círculo aunque partió del supuesto erróneo de ser en los polígonos isoperimétricos proporcional la diferencia entre el área del círculo y la del polígono con la diferencia entre el radio y la apotema del polígono. En otras investigaciones el Cusano se ocupó de la rectificación de la circunferencia dando expresiones bastante aproximadas. (2)

Desde el punto de vista técnico una obra matemática importante del siglo XV se debe a los astrónomos Georg Peurbach y su discípulo y colaborador Johannes Müller llamado el Regiomontano por su ciudad de origen Königsberg. Peurbach había iniciado una versión directa del *Almagesto* que continuó Regiomontano sustituyendo la tabla de cuerdas por tablas de senos tomando el radio de 600.000 partes y los arcos de 10° en 10°. Regiomontano mejoro esas tablas tomando los arcos de minuto en minuto y el radio de 10^8 partes, y agregó una tabla de tangentes que llama "números" para arcos de grado en grado con un radio de 100.000 partes.

Se debe a Regiomontano el primer tratado de trigonometría de influencia duradera. Es el *De triangulis omnimodis* en cinco libros compuesto hacia 1464 e impreso en 1533. En ellos aparece una nueva demostración del teorema del seno de la trigonometría rectilínea, el teorema del coseno para los triángulos esféricos una tabla como apéndice junto con la tabla de tangentes, de "doble entrada” para el cálculo de los valores de una fórmula de triángulos esféricos rectángulos, y una serie de problemas relativos a triángulos planos con la innovación de resolverse mediante el álgebra retórica, aún en los casos en que la solución geométrica podría haber sido más simple. También introduce la innovación de

dar métodos generales, prescindiendo de los valores numéricos que no elige previamente como sus antecesores.

Se debe además a Regiomontano un *Apéndice a los Elementos,* donde considera los polígonos estrellados con el estudio relativo a los ángulos exteriores. En su correspondencia aparecen problemas de análisis indeterminado semejantes a los de Leonardo Pisano; un problema de máximo, el primero después de Apolonio; y un problema geométrico, que cuyo planteo lleva a una ecuación cúbica que Regiomontano no resuelve, aunque reconoce en ella un problema de trisección.

Un acontecimiento cultural del siglo XV que tendrá notable repercusión científica es el invento de la imprenta con tipos móviles de mediados de siglo que facilitó extraordinariamente la trasmisión y difusión de los escritos científicos. Ya dijimos que la versión latina de Campano fue la primera edición impresa de los *Elementos* de Euclides en 1484, aunque fue especialmente durante el siglo XVI cuando se dieron a la imprenta las obras matemáticas clásicas de manera que a fines de ese siglo ya en idioma original, ya en versión latina los estudiosos estaban en posesión de los escritos más importantes de Arquímedes, Apolonio, Diofanto,…

Con todo conviene recordar algunos incunables, es decir, impresos del siglo XV, de interés matemático. Fuera de algunas aritméticas prácticas publicadas desde 1478 en Italia y Alemania, (3) el incunable más importante es probablemente la aritmética de Johann Widmann, aparecida en Leipzig en 1489. Comprende tres partes, la primera de las cuales, sin mayores novedades, se dedica a las operaciones aritméticas con números enteros y a las progresiones aritméticas y geométricas; la segunda parte trata de las fracciones, de las proporciones y problemas de tres y comerciales; mientras que la tercera parte es geométrica.

La novedad que aporta la segunda parte es que en ella aparecen por primera vez los signos "+" y "-", aunque no en la forma puramente simbólica con que hoy se utilizan. El signo " +" no es sólo signo de la suma, sino más bien sustituye a la cópula "y", mientras que el signo "-" no es usado exclusivamente en la sustracción, pues en ocasiones aparece la acostumbrada palabra "minus". De todos modos, el autor no indica el origen de estos

signos, de manera que acerca de tal origen pueden tejerse y se han tejido toda clase de conjeturas.

La parte geométrica del libro de Widmann es irregular: al lado de reglas, erróneas para las áreas de figuras rectilíneas, aparece el cálculo correcto del radio del círculo circunscrito a un triángulo del cual se conoce un lado, su altura y la proyección de otro lado sobre él. Pero estos problemas geométricos, como en Regiomontano, no son sino pretextos para aplicar las reglas aritméticas.

Otro acontecimiento cultural del siglo XV, que tuvo influencia en el desarrollo de la geometría fue la feliz conjunción que se realizó entonces entre la ciencia, el arte y la técnica. Así es como especialmente por obra de artistas las antiguas consideraciones griegas y árabes sobre la óptica geométrica dieron origen a una rama de la geometría: la perspectiva. Las primeras obras europeas con ese título: la *Perspectiva communis*, de John Peckam, y la *De perspectiva*, de Witelo, ambos del siglo XIII, no eran sino reelaboraciones de la óptica de Alhazen que, sobre la de Euclides, tenía entre otras la ventaja de considerar los rayos visuales partiendo de los objetos y no del ojo como lo hacía el geómetra griego.

Pero durante los siglos XIV y XV la perspectiva va perdiendo su antiguo significado para convertirse en una rama de la geometría, cuyo problema capital es la intersección con un plano (el cuadro) de las rectas que, partiendo de los distintos puntos del espacio, llegan hasta el ojo o en términos más geométricos, la intersección de un plano con un haz de rayos. Es explicable que este problema geométrico haya surgido en el seno del arte pictórico y en una época en que muchos pintores trataban de investigar los fundamentos científicos de su propio arte. A esos pintores y a tal tendencia pertenecen Filippo Brunlleschi, Lorenzo Ghiberti y, en especial, Leon Battista Alberti a quien se debe, entre otras obras, una *De pictura* que escribió en latín y en vulgar, en la que resume las consideraciones de la época sobre la geometría aplicada al dibujo y a la pintura.

Estas consideraciones dieron lugar, algo más tarde, a un tratado especial: el primero en su género, que escribió en latín, pero también en vulgar el pintor Piero della Francesca a fines del siglo XV: *De perspectiva pingendi* "proyección central", donde aún en

forma embrionaria aparecen las primeras nociones de la rama de la actual geometría descriptiva. En ese tratado, que no se publicó hasta fines del siglo pasado, se exponen: en la primera parte los principios generales, en la segunda la proyección de cuerpos regulares y en la tercera de cuerpos irregulares. Otra obra de Piero della Francesca en latín sobre los poliedros regulares, que Pacioli hizo conocer más tarde en vulgar.

Dos artistas egregios se ocuparon de perspectiva: Leonardo y Dürer, quienes, por lo demás, también contribuyeron en otras ramas de la matemática. (4) Las consideraciones sobre perspectiva de Leonardo figuran en la compilación que, en 1651, apareció con el nombre de *Tratado de la pintura*. Es posible que tales consideraciones fueran tratadas por Leonardo en forma especial pues se tiene noticias de que a mediados del siglo XVI, un par de decenios después de su muerte, circulaban manuscritos con tales consideraciones.

En cuanto a Dürer es interesante destacar que en sus escritos introdujo el uso de las proyecciones horizontal y vertical, que tres siglos después sistematizaría Monge; sin embargo, no encontraron entonces igual apoyo que los métodos de proyección central de la perspectiva.

Discípulo de Piero della Francesca y vinculado con el mundo de artistas y técnicos del Renacimiento italiano, fue Luca Pacioli, a quien se debe, entre otras obras, una *Summa de Arithmetica*, *Geometría*, *Proportioni et Proportionalita*, impresa en 1494, de carácter enciclopédico y resumen de todo el saber matemático de la época, cuyo objeto fue poner ese conocimiento a disposición de los técnicos, artistas y comerciantes, por lo cual la escribió en lengua vulgar, aunque con más precisión habría que decir en una mezcla de latín, de italiano y de todos los dialectos de las numerosas regiones que Pacioli visitó o en las que enseñó. Sin contar el entusiasmo que Pacioli muestra por la matemática en todos sus escritos (5) su mérito principal consiste en haber ofrecido en especial en su *Summa* un arqueo del saber matemático de su tiempo, que sirve muy bien de jalón para apreciar los progresos realizados desde Leonardo Pisano y para medir también los avances que se harán en los siglos sucesivos.

Aunque en la obra de Pacioli ya hay importantes atisbos en materia de simbolismo algebraico, en este campo son más originales las aportaciones de un francés, Nicolás Chuquet, que por haber permanecido inéditas, ejercieron menor influencia. Aparecen en una obra compuesta en 1484, en tres partes, de ahí su nombre *Le Triparty en la science des nombres*. La primera parte comprende las operaciones con enteros y fracciones, dando explícitamente la regla de los signos para la multiplicación y división, en la segunda parte se estudian las raíces y sus operaciones que maneja con gran desenvoltura, utilizando la multiplicación por la expresión conjugada para racionalizar denominadores, mientras que la tercera parte se ocupa de la resolución de ecuaciones que Chuquet denomina "equipolencia entre números" cuadráticas o reducibles a cuadráticas. Como apéndice, el manuscrito del *Triparty* trae una colección de 166 problemas, probablemente del mismo autor.

Es posible que la mayor originalidad de Chuquet resida en el simbolismo: aparece como signo de raíz la letra R con un exponente 2 ó 3 según sea cuadrada o cúbica; todas las potencias de las incógnitas se indican mediante el exponente aplicado al coeficiente, apareciendo en algún caso el exponente cero y el -1; la suma y la resta se indican con las síncopas *p* y *m*,... (6)

Notas complementarias

(1) La regla de Merton y Oresme. La regla de Merton, tal como la expone gráficamente Oresme, es la siguiente: si *BC* es la gráfica de un movimiento uniformemente acelerado, el trapecio *ABCD* representa el espacio recorrido durante el tiempo $t = AD$. Como ese trapecio equivale al rectángulo de base *AD* y altura *MN,* base media del trapecio, aquel espacio será el recorrido por el movimiento uniforme, cuya gráfica es *EF*, de velocidad $v_m = MN$ media entre las velocidades $v = AB$, inicial y $V = DC$, final del movimiento uniformemente acelerado. La justificación algebraica es inmediata. En efecto, el espacio recorrido por ambos movimientos es $e = t \cdot v_m = 1/2(v + V)t$, pero, por ley del movimiento variado $V =$

$v + gt$ siendo una constante, y en definitiva $e = vt + 1/2gt^2$, que es la ley de ese movimiento respecto del tiempo.

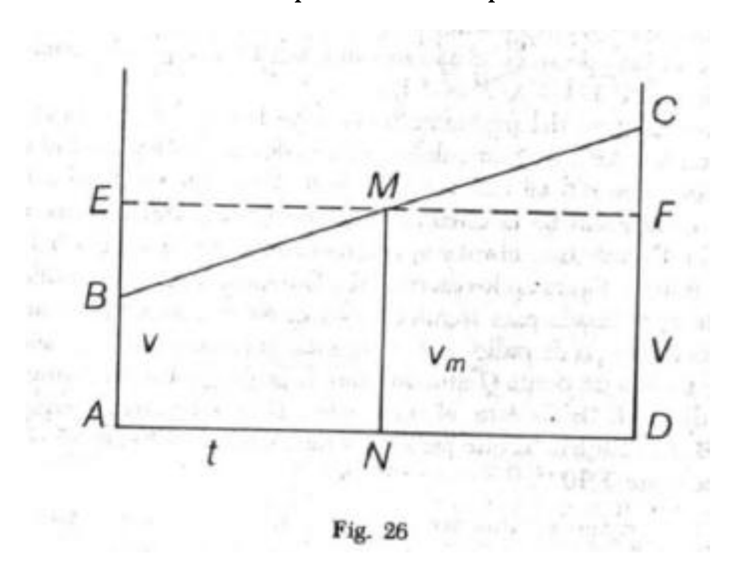


Fig. 26

En cuanto a los movimientos artificiales de "Calculator" y de Oresme, son los siguientes. El primero considera una serie de movimientos uniformes, tales, que los intervalos sucesivos de tiempo forman una progresión geométrica de primer término y razón ½ , mientras que las velocidades son los términos de una progresión aritmética de primer término y razón 1; y llega a la conclusión de que el espacio total es el cuádruplo del espacio recorrido por el primer movimiento, es decir, 4· ½ = 2. En efecto, la suma de los rectángulos de área ½ ; $^2/_4$; $^3/_8$;... equivale a la suma de los rectángulos de altura unitaria y bases 1; ½ ; ¼ ;…, que es 2.

El "movimiento" de Oresme es aparentemente más complicado pues las áreas parciales son alternativamente de rectángulos y de trapecios. En efecto Oresme considera, con igual división del tiempo en intervalos como en el caso anterior, una suma de movimientos alternativamente uniformes y uniformemente acelerados, tales que sin discontinuidad en cada movimiento variado la velocidad final es doble de la inicial, de manera que al partir de un movimiento uniforme de velocidad 1, los distintos espacios recorridos serán ½ ; $^3/_8$; ¼ ; $^3/_{16}$; ... Como en definitiva se trata de dos progresiones geométricas de razón ½ , cuya suma

respectiva es el doble del primer término y como el primer término el de la segunda serie es $^3/_4 e_i$ siendo e_i el primer término de la primera serie, el espacio total recorrido será $3/7/4\ e_i$ que es el resultado que da Oresme, es decir, en la forma de los $^7/_2$ de e_i.

(2) Las rectificaciones aproximada de Nicolás de Cusa. Según el Cusano la circunferencia es igual al perímetro del triángulo equilátero inscrito en un círculo cuyo diámetro es el radio de la circunferencia a rectificar más el lado de su cuadrado inscrito, regla que equivale tomar para π el valor $\frac{3}{4}\sqrt{3}(1+\sqrt{2}) = 3{,}136...$

Como solución del problema inverso de la rectificación da la regla siguiente: Sea ABC un triángulo equilátero de centro de gravedad G y N un punto sobre AB tal que $AN = 1/4\ AB$. Un segmento igual a los $^5/_4$de GN es el radio de la circunferencia de igual perímetro que el del triángulo. En este caso el valor aproximado de π es $\frac{24}{35}\sqrt{21} = 3{,}142\ ...$

Por último, figura en los escritos del Cusano la siguiente rectificación bastante aproximada para ángulos menores de 30°; Si AB es el arco de una circunferencia de radio r y D un punto de la tangente en A alineado con B y un con un punto C situado sobre la prolongación del diámetro de A a la distancia $3r$ de éste, el segmento AD es aproximadamente igual arco AB. Se comprueba que para arcos menores que 30° el error relativo es menor que $3 \cdot 10^{-4}$.

(3) Las primeras aritméticas impresas. El primer escrito matemático que apareció impreso es una *Aritmética* llamada "de Treviso", pues fue publicada en esta ciudad en 1478. Es una obrita anónima de 62 páginas de índole práctica que trata de las cuatro operaciones y de la determinación de la fecha de Pascua.

Cuatro años después un escrito semejante en Bamberg del cual no se conservan sino fragmentos, mientras se conserva actualmente un ejemplar de esta “Aritmética” de Bamberg publicada el año siguiente. Es una obra algo más larga que la anterior, dedicada especialmente a los cálculos que se presentan en las transacciones comerciales; no se ocupa de la fecha de Pascua, en

cambio trae reglas para la suma de los números naturales y de términos en progresión geométrica.

En 1484 aparece en Italia otra aritmética práctica, ahora de autor conocido: Pietro Borghi, sin mayor valor respecto de las anteriores, pero que contó, hasta fines del siglo XVI, 15 ediciones.

(4) La matemática en Leonardo y Dürer. Las libretas de apuntes de Leonardo muestran que poseía buenos conocimientos matemáticos, como las consideraciones que aparecen en el *Tratado de la pintura* lo comprueba, así como otras contribuciones de carácter geométrico no totalmente desvinculadas de su condición de artista; entre ellas algunas que hasta pueden calificarse de juegos como sus variadas aplicaciones de las lúnulas de Hipócrates. Por ejemplo, partiendo de la propiedad de la equivalencia del semicírculo de diámetro *AB* y el sector circular *OAB* de ángulo central el semirrecto, es claro que duplicando la figura el recinto mixtilíneo *ABOB'A'A'* es equivalente al triángulo *AOA'* y, por tanto, cuadrable.

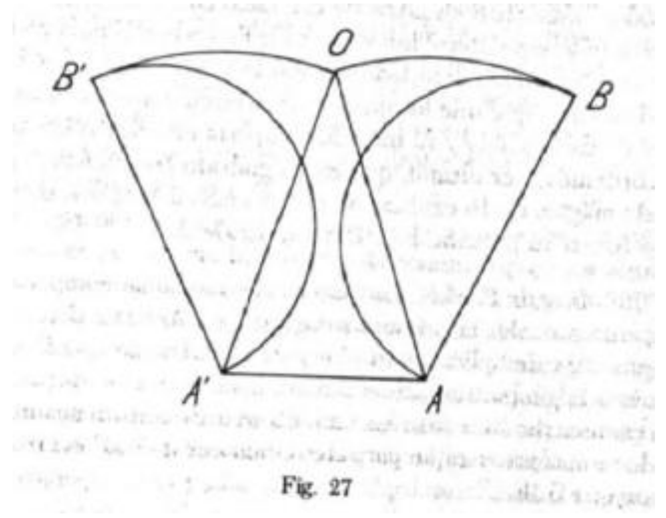


Fig. 27

Es probable que este tipo de juegos lo llevara a investigar el problema análogo, pero referente al espacio sobre el cual se propuso escribir un tratado: *Sobre la trasformaciones de un cuerpo sin disminución o aumento de materia.*

Las figuras regulares atrajeron a Leonardo, pues en sus manuscritos aparecen numerosos dibujos y propiedades de esas

figuras: construcción aproximada de polígonos regulares, no construibles exactamente con regla y compás, y es casi seguro que le pertenecen las figuras nada fáciles de dibujar, de los poliedros regulares y semirregulares llenos o huecos cuyas copias ilustran el manuscrito códice de la *Divina proportione* que, en 1498, Pacioli ofreció a Ludovico il Moro.

Agreguemos que también se le deben dibujos y proyectos de instrumentos matemáticos como compases de proporción y un parabológrafo que probablemente construyó y utilizó en la construcción de espejos parabólicos.

En cuanto a Dürer además de utilizar las proyecciones horizontal y vertical en su escrito sobre las proporciones del cuerpo humano, se le debe un tratado geométrico que en versión latina es *Institutionem geometricarum*, donde se ocupa de curvas, de superficies y de sólidos, así como de otras cuestiones, cuyo objeto era poner a disposición de los artistas construcciones geométricas que podían serles útiles. Se le debe la invención de una curva de cuarto grado y del aparato para construirla así como construcciones aproximadas para trisecar ángulos, y construir polígonos regulares. Por la forma "artística" que comporta puede ser de interés señalar la construcción del eneágono. Con radio $3r$ dibuja la "flor de tres pétalos" mediante los arcos de ese radio con centros en los vértices de un triángulo equilátero; luego, corta la figura con la circunferencia de radio r considerando como lado del eneágono inscrito en este segundo círculo la cuerda que une los puntos de su circunferencia situados en los "bordes de cada pétalo". El método comporta un error relativo del 2 %.

Recordemos, por último, que en su grabado *Melancholia* aparece un cuadrado mágico de 16 casillas; sin ser una novedad es uno de los primeros que hacen su presencia en Europa occidental.

(5) La obra de Pacioli. *La Summa* de Pacioli se compone de cinco partes, de las cuales la primera se ocupa de aritmética y de álgebra, las tres siguientes de aplicaciones al comercio, mientras que la última está dedicada a la geometría.

La parte aritmética se inicia con una serie de consideraciones mística sobre los números para luego pasar a las operaciones con números "sanos" (enteros). Para la multiplicación da ocho

procedimientos y dos para la división agregando en cada caso la prueba del 9 y del 7, pues la del 9 "no es muy segura". Siguen luego operaciones especiales: progresiones aritméticas y geométricas, suma de los números naturales, sus cuadrados y sus cubos, extracción aproximada de la raíz cuadrada. A continuación se dan una serie de problemas: del ajedrez, de los móviles de matemática recreativa,… después de lo cual pasa a los números rotos (fracciones) que escribe en la forma actual separando con una raya el "numerador" del "denominador", enseñando a descomponerla según fracciones continuas ascendentes.

Siguen una seria de problemas de aritmética comercial, entre los cuales se destacan algunos de tipo hoy llamados trascendentes de los cuales Picioli da soluciones bastantes aproximadas. Por ejemplo, en un problema concreto que llevaría a nuestra ecuación $x \cdot 2^x = 30$, Picioli encuentra por tanteos que $3 < x < 4$; haciendo por tanto $x = 3 + y$ y en el resultado de la sustitución tomando aproximadamente, por ser y pequeño, $2^y = y + 1$; llega a una ecuación de segundo grado que da para x el valor 3,179… (el valor exacto es 3,22…).

Otra ecuación trascendente, de reminiscencia babilónica, tiene como incógnita el tiempo en que se duplica un capital a interés compuesto con la tasa *t*, del cual Pacioli da como solución *72/t.* Actualmente el primer término del desarrollo en serie de la incógnita sería *69,3…/t.*

Después de una serie de consideraciones acerca de las proporciones, tema al cual Pacioli dedicó en sus estudios preferente atención pasa a considerar problemas resueltos por el método de falsa posición, cuyo nombre árabe recuerda, y finalmente estima haber llegado al objeto de su libro que el álgebra que inicia con las siguientes palabras que parafraseamos: "Hemos llegado con ayuda de Dios a la meta deseada; vale decir, a la madre de todos los casos que el vulgo llama regla de la cosa o Arte mayor o Parte especulativa, pero también llamada Algebra y Almu-cabala en lengua árabe o caldea, según otros y que en nuestra lengua equivale a restauración y oposición. *Algebra id est restaurationis. Almu-cabala id est oppositionis".*

Si en la parte puramente técnica Pacioli no va mucho más allá de sus antecesores es en cambio interesante esta etapa de "álgebra

sincopada” intermedia entre el álgebra retórica y el álgebra simbólica. Así Pacioli abrevia las palabras *plus* y *minus* con *p* y *m*, letras que funcionan entonces como nuestros signos + y - ; indica las raíces cuadradas y cúbicas con una *R* cruzada por una raya oblicua y seguida del número 2 y 3, respectivamente. A la incógnita la llama *cosa* y abrevia *co* (cuando hay una segunda incógnita ésta es denominada cantidad); y a sus distintas potencias con palabras especiales y abreviadas respectivamente. Claro es que bastaba designar las potencias de exponentes primos: así x^2 es *censo*, abreviado *ce*, x^3 es *cubo*, abreviado *cu*, x^5 es *primo relato* abreviado p^0r^0, x^7 *secondo relato*, abreviado 2^0r^0 y así sucesivamente hasta x^{27} (en realidad no es muy consecuente pues x^{25} que debía ser *primo relatio de primo relato* lo designa *ottavo relato*). Otra abreviatura empleada es *ae* por la palabra *aequalis* (igual).

En sus ecuaciones no aparece ninguna novedad. No admite números negativos, pues "es claro -dice- *m4* es menos que nada". Sin mayores especificaciones considera imposible la ecuación de tercer grado, y al resolver las ecuaciones se deja llevar a veces por el algoritmo algebraico dando soluciones no enteras para problemas que sólo admiten raíces de esa naturaleza.

Las tres partes siguientes de la *Summa* tienen menor interés matemático: se refieren a la contabilidad y teneduría de libros, con una extensa aplicación a la llamada "partida doble", innovación técnica medieval probablemente italiana del siglo XIII. Un problema que figura en estas partes, no resuelto en forma satisfactoria por Pacioli, sobre el reparto de la apuesta entre dos jugadores antes de terminar el juego, tiene interés histórico, pues reaparecerá un par de siglos después con el advenimiento del cálculo de probabilidades.

La quinta parte de la *Summa* se dedica a la geometría y en ella se exponen las propiedades, sin demostraciones, relativas a figuras planas y del espacio con sus áreas y volúmenes. Más original es el final del libro que comprende 100 problemas geométricos: gráficos y métricos. Estos últimos se resuelven algebraicamente y en algunos casos complicándolos innecesariamente; como en el caso de determinar los lados de un triángulo conociendo el radio del círculo inscrito y los segmentos en que el punto de tangencia del círculo divide a uno de los lados. En lugar de aplicar el teorema de

Herón, que conoce, y que resolvería el problema mediante una ecuación de primer grado hace un largo rodeo que lo obliga a calcular 10 segmentos intermediarios y resolver una ecuación de segundo grado.

Una segunda obra de Pacioli, que publicó en 1509, es *Divina proportione*, de escaso valor matemático en tres partes. La primera es un estudio, más místico que geométrico de la "divina proporción", es decir, la división en media y extrema razón con algunas propiedades sin demostración; la segunda se ocupa de arquitectura, y la tercera no es sino la traducción en vulgar del escrito de Piero della Francesca *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularum*; en verdad la parte más matemática de la obra, donde se tratan problemas geométricos acerca de triángulos, polígonos y poliedros, cuyo objeto es determinar con ejemplos numéricos, longitudes, áreas y volúmenes de figuras planas y sólidas.

Una tercera obra de Pacioli, inédita, es una colección de problemas aritméticos y geométricos del tipo de la matemática recreativa, con agregado de refranes, anécdotas, etcétera. En general son problemas ya conocidos, como novedad pueden citarse los cuadrados mágicos de los que Pacioli da ejemplo de cuadrados de 9, 16, 25,…81 casillas, que vincula con los siete cuerpos celestes de la antigüedad.

(6) EL Triparty de Chuquet. Mencionemos un par de ejemplos de este libro. En ciertos sistemas lineales muestra Chuquet un claro sentido de la generalización, resolviendo ordenadamente sistemas de 3, 4, 5 ecuaciones del mismo tipo. Un ejemplo de interés es el siguiente: Hallar cinco números tales, que cada uno de ellos sumados, respectivamente, a la suma de los restantes por $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ el resultado es siempre 40 Chuquet llega al resultado mediante un método no muy diferente del actual y en que aplica en cierto momento la falsa posición simple, pero el interés del resultado es que en él aparecen valores nulo y negativo, pues los números son 30; 20; 10; 0; -10 (número este último que Chuquet llama “ menos 10”).

En las ecuaciones cuadráticas no reconoce, en cambio, la solución nula (la ecuación $5x^2 = 9x^2$ no tiene solución), mientras interpreta correctamente, como imposible, una raíz cuadrada de radicando negativo.

He aquí ecuaciones cuadráticas resuelta por Chuquet con su notación algebraica y, a la derecha, su traducción con el simbolismo actual.

$R^2 4^2 p4^1 p2^1 p1 \; igual \; a \; 100$ $\qquad \sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1 = 100$
$\overline{R^2 4^2 p4^1} \; de \; una \; parte \; y \; 99m2^1 \; de \; la \; otra$ $\qquad \sqrt{4x^2 + 4x} = 99 - 2x$
$4^2 p4^1 \; igual \; a \; 9801 \; m396^1 p4^2$ $\qquad 4x^2 + 4x = 9801 - 396x + 4x^2$
$400^1 \; de \; una \; parte \; y \; 9801 \; de \; la \; otra$ $\qquad 400x^2 = 9801$
De donde se deduce fácilmente el valor de la incógnita.

TABLA CRONOLÓGICA

Milenio III a.C.	Están en vigencia dos sistemas de numeración escrita: el sistema sexagesimal (posicional) de los sumerios y el sistema decimal (aditivo) de los egipcios. Probable época de la fijación del calendario solar egipcio de 365 días.
Milenio II a. C.	Época de las tablillas matemáticas con textos cuneiformes descifradas en este siglo (ecuaciones de segundo grado, método de falsa posición, teorema de Pitágoras, tripletes pitagóricos,...).
s. XVII a. C.	Época del más importante documento matemático egipcio: el papiro Rhind.
c. 1000 a. C.	Los babilonios extienden a los círculos celestes la división del día en 360 partes.
s. VI a. C.	Época del legendario PITÁGORAS y de la fundación en Crotona de la escuela o secta de los pitagóricos, a quienes se atribuye el nacimiento de la matemática como ciencia deductiva. Se les debe: propiedades de los números (números figurados, amigos, perfectos); el teorema de Pitágoras y los tripletes pitagóricos; los problemas de aplicación de áreas y el descubrimiento de los “irracionales", aunque la primera noticia de tal descubrimiento aparece en un *Escolio* de ARlSTÓTELES.
529 a. C.	Se produce un eclipse de Sol que habría predicho TALES de Mileto, a quien por lo demás se le atribuyen conocimientos geométricos.
s. V a. C.	"Siglo de Pericles", en el que nacen y se estudian los “problemas clásicos" de la geometría griega: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Florecen en él HIPÓCRATES de Quio, que se ocupó de la duplicación del cubo e inventó, en conexión con el problema de la cuadratura, las "lúnulas" que llevan su nombre: FILOLAO de Crotona, pitagórico que habría divulgado los conocimientos secretos de la secta; TEODORO de Cirene que demostró la irracionalidad de varios números; ZENON de Elea, autor de argumentos, algunos de índole matemática, contrarios a las concepciones de los pitagóricos; HIPIAS de Elis que, al ocuparse de la trisección, inventó una curva llamada más tarde "cuadratriz" por su aplicación al problema de la cuadratura; y ARQUITAS de Tarento que se ocupó de la duplicación. - En este siglo el sistema de numeración griego con letras comienza a desplazar un sistema más antiguo llamado más tarde “herodiánico".

s.IV a. C.	Siglo de la Academia de PLATÓN y del Liceo de ARlSTÓTELES. Con la Academia se vinculan EUDOXO de Cnido, a quien se debe el método más tarde llamado de "exhaución" y una teoría general de la proporcionalidad; TEETETO de Atenas que se ocupó de irracionales; MENECMO a quien se le atribuye el invento de las cónicas; y su hermano DINOSTRATO que se ocupó del problema de la cuadratura.- Con ARISTÓTELES, que se ocupó de los principios de la matemática, se vincula EUDEMO de Rosas a quien ARISTÓTELES encomendó una compilaci6n de los conocimientos geométricos de la época. - También pertenece a este siglo DEMÓCRITO de Abdera, el fundador del atomismo griego, a quien ARQUÍMEDES menciona con motivo del volumen de la pirámide.
c. 300 a.C.	Florece EUCLIDES de Alejandría, autor de *Elementos de geometría*, sistematización de gran parte de la geometría griega.- Probable fecha del sistema vigesimal (posicional) de numeración de los mayas.
s. III a. C.	Pertenecen a este siglo ARQUÍMEDES de Siracusa que dejó vinculado su nombre con la hidrostática, con la teoría de la palanca y con una espiral. Se ocupó además de la medida de la circunferencia y de diversas cuestiones de aritmética y de geometría plana y sólida, llegando mediante un original método de su invención a resultados que luego demostraba rigurosamente por exhaución; y APOLONIO de Perga a quien se debe el tratado griego más completo acerca de las cónicas. - También florecen en el siglo ERATÓSTENES de Cirene que, además de realizar la primera medición científica de la Tierra, se ocupó del problema de la duplicación; NICOMEDES que se ocupó de la trisección; y ARISTARCO de Samos, autor de un sistema planetario heliocéntrico que aplicó la matemática a la astronomía.
s. II a. C.	Florecen en este siglo HÍPSICLES de A1ejandria, autor de un supuesto "libro XIV" de los *Elementos* de EUCLIDES, que se ocupó de poliedros regulares; TÉODOSIO de Bitinia que publicó el primer tratado de *Esférica*, HIPARCO de Nicea, astrónomo que sentó los fundamentos del sistema geocéntrico que luego desarrollaría PTOLOMEO; y DIOCLES, que se ocupó del problema de la duplicación.-Edad de oro de la astronomía caldea. – Probable época del tratado clásico chino: *Las reglas de cálculo en nueve parte* de CHANG TS'ANG.
46 a. C.	Julio Cesar introduce el año bisiesto en el calendario (reforma juliano)

s. I a. C.	Florecen en este siglo NICÓMACO de Geresa, autor de un tratado elemental de aritmética; MENELAO de Alejandría que se ocupó de geometría plana y esférica; y HRÓN de Alejandría, autor de filiación discutida que se ocupó de matemática y de técnica, a quien se atribuye un teorema de geometría plana que lleva su nombre.
s. II	Pertenece a este siglo el astrónomo PTOLOMEO de Alejandría a quien se debe una "Tabla de cuerdas", en cuya construcción utilizó teoremas que llevan su nombre.
s. III	Aparece la *Colección matemática* de PAPPUS de Alejandría, sistematización de la matemática griega con mucho de original. Probablemente de este siglo DIOFANTO de Alejandría, cuya obra se conecta hoy con la matemática de los babilonios y que se ocupó d teoría de números, pero en especial de análisis indeterminado en su *Aritmética*.
s. IV	Pertenece a este siglo: TEÓN de Alejandría, cuya revisión de los *elementos* de EUCLIDES sirvió de base para las ediciones modernas de la obra; y su hija HIPATÍA, también matemática que comentó autores antiguos, recordándosela por su muerte en los tumultos entre paganos y cristianos.
s. V	Primeras manifestaciones de la matemática hindú. En los *siddhanta*, obras de índole astronómicas, ya no se miden los arcos mediantes las cuerdas, como en PTOLOMEO, sino mediante la semicuerda y la flecha (nuestro seno y la diferencia entre el radio y el coseno). La construcción de una "tabla de senos" se señala en la obra del hindú ARYABHATA de este siglo, que se ocupó también de análisis indeterminado (con números enteros). También pertenecen a este siglo EUTOCIO de Ascalena, comentarista de autores griegos; y el filósofo PROCLO de Bizancio, autor de un importante comentario al "Libro I" de los *elementos* de EUCLIDES.
s. VI	Desde comienzo de este siglo está establecido el actual sistema de numeración decimal de origen hindú. El romano BOECIO compone tratados elementales de aritmética y geometría, que constituyen textos durante los tiempos medievales.
s. VII	BRAHMAGUPTA se ocupa de análisis indeterminado.
s. VIII	En las escuelas del reino franco se imparte la enseñanza del *quadrivium*; aritmética, geometría, música y astronomía, de acuerdo con el plan fijado por ALCUINO de York.

S. IX	Comienza el aporte árabe a la matemática, en matería de traducciones y obras originales: AL-KHUWARIZMI compone una Aritmética que contribuyó a difundir el sistema decimal de numeración y un tratado, que dio nacimiento al álgebra, que con la resolución numérica de la ecuación de segundo grado y su comprobación geométrica; TABIT b.QURRA traduce obras griegas al árabe y de las más antigua regla para obtener "números amigos"; AL-MAHANI traduce algebraicamente problemas geométricos, no reducibles a ecuaciones cuadráticas.
s. X	El árabe ABU AL-WAFFA se ocupa de las funciones circulares. GEBERTO de Aurillac divulga en Occidente el uso de las cifras hindúes (sin el cero).
s. XI	Apogeo de la matemática árabe en Oriente: ALHAZEN se ocupa de matemática y de óptica; AL-KARHI da una demostración geométrica de la suma de los cubos; OMAR KHAYYAM clasifica y resuelve las ecuaciones hasta las cuárticas, en forma aritmética o geométrica.
s. XII	En la Iberia musulmana GEBER (Jabir b.Aflah) se ocupa de trigonometría esférica. El hindú BASKHARA se ocupa de álgebra. Comienza el periodo de la trasmisión a Occidente del saber árabe (en gran parte de origen griego); ADELARDO de Bath y ROBERTO de Chester traducen a AL-KHUWARIZMI; en España JUSN de Sevilla y Domingo GUNDISALVO traducen en colaboración pasando por el castellano: igualmente traducen en colaboración del hebreo al latín ABRAHAM Bar Hiyya y Platón de Tivoli; culminando la era de los traductores con la escuela de Toledo y GERARDO de Cremoa; a quien se debe la traducción de una quincena de autores griegos y árabes.
s. XIII	En Oriente florece al árabe NASIR AL-DIN, mientras en Sicilia GUILLERMO de Moerbecke traduce directamente del griego al latín. Comienza el despertar matemático de Occidente; FIBONACCI propugna el sistema de numeración decimal en su *LIber Abaci* de 1202 y se ocupa de teoría de números, álgebra y geometría; un JORDANUS Nemorarius se ocupa de álgebra; CAMPANO traduce a Euclides; y el astrónomo SACROBOSCO se ocupa de aritmética. Fuera del campo estrictamente matemático el escolástico Ramón LULL trata cuestiones lógicas.
s. XIV	Florece el chino CHU SHI-CHIEN, en cuya obra aparece el "triángulo aritmético"; y el inglés BRADWARDONE, autor de una geometría especulativa. La trigonometría se desarrolla por obra del judío LEVI b.Gerson y el inglés WALLINGGROAD. Se estudia el movimiento uniformemente variado en forma gráfica por el francés ORESME y en

	forma retorica por los ingleses HEYTESBURY y “Calculator” (regla de Mertón).
c. 1340	Se menciona el método de contabilidad por partida doble.
s. XV	El filósofo Nicolás de CUSA se ocupa de distintas cuestiones matemáticas. En la segunda mitad del siglo los astrónomos PEURBACH y REGIOMONTANO compilan tablas de funciones circulares. Aparecen los primeros tratados de aritmética impresos: Treviso (1478); de Pietro Borghi (1484) y de Widmann (1489); en este último, se introducen los signos + y - . a fines de este siglo, Piedro della Francesca compone un tratado de perspectiva que circula manuscrito.
1484	Se imprime el Euclides de CAMPANO. LEONARDO da Vinci inicia su carrera de ingeniero, durante la cual se ocupó de variadas cuestiones matemáticas.
1484	*Le triparty en la sciencie de nombres* de CHUQUET que trata de aritmética, álgebra, simbolismo, racionalización de denominadores…
1494	PACIOLI *summa de arithmetica, geometria, proportiono et proportionalita*, resumen de la matemática medieval.
c. 1509	Época en la que DEL FERRO habría resuelto una ecuación cubica trinomía.
1509	PACIOLI, la *divina proporción* que trae como apéndice un tratado de los cuerpos regulares (sin nombre de autor) de PIERO della Francesca, compuesto en 1487. En *libri de triplicimotu*, Alvaro TOMÁS suma series convergentes.
1525	DÜRER se ocupa de cuestiones geométricas y de perspectiva, introduciendo las proyecciones horizontales y verticales. En Die coss RUDOLFF introduce el signo de raíz.
1533	Aparece póstuma *De triangulis* de REGIOMONTANO, obra compuesta hacia 1464, que constituye el primer tratado de trigonometría de importancia en latín.